LANDAU

Sur une inégalité de M. Hadamard

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 135-140

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__135_1>

[D6iβ]

SUR UNE INÉGALITÉ DE M. HADAMARD;

PAR M. LANDAU.

Dans un travail récent *Sur les séries de la forme* $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$, publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4^e série, t. IV, 1904, p. 529-533), M. Hadamard a développé quelques inégalités, qui, suivant son expression, « peuvent avoir leur utilité ». Je vais confirmer, dans les pages suivantes, cette attente de M. Hadamard, en en faisant une petite application à la théorie de la fonction $\zeta(z)$ de Riemann. En combinant les anciennes méthodes avec une de ses nouvelles relations, je parviendrai à prouver le théorème suivant :

Il existe une constante positive α *telle que, pour tous les* $q > 0$,

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{\alpha}{1+\log^6 q}.$$

En d'autres termes, la limite inférieure d'indétermination, pour $q=\infty$, du produit

$$\log^6 q\,|\zeta(1+qi)|$$

est supérieure à o.

Jusqu'ici, on ne connaissait que l'inégalité un peu moins précise

$$\liminf_{q=\infty} \log^7 q\,|\zeta(1+qi)| > 0,$$

démontrée par moi, comme proposition auxiliaire, par exemple dans mon travail *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes* [*Mathematische Annalen,* t. LVI, 1903, p. 654, formule (19)].

Je commence par refaire, dans un cas spécial, un raisonnement général de M. Hadamard. Soit

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$$

une série de Dirichlet, dont les coefficients a_n sont tous $\geqq 0$ et qui converge pour $R(z)>1$. Soient $\varepsilon>0$, q réel; on aura

$$F(1+\varepsilon) \quad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

$$F(1+\varepsilon+qi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{1+\varepsilon+qi}},$$

$$R\,F(1+\varepsilon+qi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}}\cos(q\log n),$$

et pareillement

$$R\,F(1+\varepsilon+2qi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}}\cos(2q\log n).$$

Donc, en posant

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}(1+\varepsilon) \qquad &= \mathrm{R}_0, \\ \mathrm{R\,F}(1+\varepsilon+qi) \;\; &= \mathrm{R}_1, \\ \mathrm{R\,F}(1+\varepsilon+2qi) &= \mathrm{R}_2, \end{aligned} \right.
$$

$$
\begin{aligned}
0 &\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \left(\cos(q \log n) - \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_0}\right)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \left(\cos^2(q \log n) - \frac{2\,\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_0}\cos(q\log n) + \frac{\mathrm{R}_1^2}{\mathrm{R}_0^2}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2q\log n) - \frac{2\,\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_0}\cos(q\log n) + \frac{\mathrm{R}_1^2}{\mathrm{R}_0^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{R}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{R}_2 - \frac{2\,\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_0}\mathrm{R}_1 + \frac{\mathrm{R}_1^2}{\mathrm{R}_0^2}\mathrm{R}_0 = \frac{1}{2}\mathrm{R}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{R}_2 - \frac{\mathrm{R}_1^2}{\mathrm{R}_0},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_0} \geqq 2\left(\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{R}_0}\right)^2 - 1.
$$

C'est l'inégalité (3) du Mémoire de M. Hadamard, pour le cas spécial qui m'intéresse; elle donne

$$
\mathrm{R}_1^2 \leqq \frac{1}{2}\mathrm{R}_0(\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_2),
$$

$$
(2) \qquad \mathrm{R}_1 \geqq -\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{R}_0(\mathrm{R}_0+\mathrm{R}_2)}.
$$

Je rappelle en outre les propositions connues (*voir* p. 649, 651 et 653 de mon Mémoire cité) :

$$
(3) \qquad \log\zeta(1+\varepsilon) < 1 + \log\frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{pour} \qquad 0 < \varepsilon \leqq 1,
$$

$$
\left. \begin{aligned} (4) \qquad & |\zeta(1+\varepsilon+2qi)| < 2\log q \\ (5) \qquad & |\zeta'(1+\varepsilon+\;\;qi)| < 6\log^2 q \end{aligned} \right\} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \varepsilon \leqq 1, \quad q \geqq 10.
$$

Je pose maintenant, pour $\mathrm{R}(z) > 1$,

$$
\mathrm{F}(z) = \log\zeta(z) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\,\frac{1}{p^{mz}},
$$

où p parcourt les nombres premiers; c'est une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

où $a_n = \frac{1}{m}$ pour $n = p^m$ et $a_n = 0$ pour les n qui ne sont pas des puissances de nombres premiers. Tous les a_n étant $\geqq 0$, on peut appliquer l'inégalité (2), en posant, d'après (1),

$$\begin{aligned} R_0 &= \log \zeta(1+\varepsilon), \\ R_1 &= R \log \zeta(1+\varepsilon+qi) = \log |\zeta(1+\varepsilon+qi)|, \\ R_2 &= R \log \zeta(1+\varepsilon+2qi) = \log |\zeta(1+\varepsilon+2qi)|. \end{aligned}$$

On obtient, pour $\varepsilon > 0$, $q \gtreqless 0$,

$$\log |\zeta(1+\varepsilon+qi)| \geqq -\sqrt{\frac{1}{2}\log\zeta(1+\varepsilon)\left(\log\zeta(1+\varepsilon)+\log|\zeta(1+\varepsilon+2qi)|\right)},$$

d'où, en vertu de (3) et (4), pour $0 < \varepsilon \leqq 1$, $q \geqq 10$,

$$\log |\zeta(1+\varepsilon+qi)| \geqq -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}+1+\log\log q\right)},$$

$$(6) \qquad |\zeta(1+\varepsilon+qi)| \geqq \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(2+\log\frac{1}{\varepsilon}+\log\log q\right)}}}.$$

D'autre part, pour $0 < \varepsilon \leqq 1$, $q \geqq 10$, (5) donne

$$|\zeta(1+\varepsilon+qi) - \zeta(1+qi)| = \left| \int_{1+qi}^{1+\varepsilon+qi} \zeta'(z)\,dz \right| < 6\varepsilon \log^2 q,$$

donc, en appliquant (6),

$$\begin{aligned} |\zeta(1+qi)| &= |\zeta(1+\varepsilon+qi) - (\zeta(1+\varepsilon+qi) - \zeta(1+qi))| \\ &\geqq |\zeta(1+\varepsilon+qi)| - |\zeta(1+\varepsilon+qi) - \zeta(1+qi)| \\ (7) \qquad &> \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\log\frac{1}{\varepsilon}\right)\left(2+\log\frac{1}{\varepsilon}+\log\log q\right)}}} - 6\varepsilon \log^2 q. \end{aligned}$$

Pour tout $q \geqq 10$, je fais maintenant

$$\varepsilon = \frac{1}{e^{10}\log^8 q},$$

ce qui satisfait évidemment aux conditions $0 < \varepsilon \leqq 1$. J'obtiens, en vertu de (7),

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}(11+8\log\log q)(12+9\log\log q)}}} - \frac{6}{e^{10}\log^6 q},$$

$$(8)\quad \log^6 q\,|\zeta(1+qi)| > \frac{\log^6 q}{e^{6\sqrt{\left(\frac{11}{8}+\log\log q\right)\left(\frac{4}{3}+\log\log q\right)}}} - \frac{6}{e^{10}}.$$

Or, en posant $\log\log q = y$,

$$\lim_{q=\infty} \frac{\log q}{e^{\sqrt{\left(\frac{11}{8}+\log\log q\right)\left(\frac{4}{3}+\log\log q\right)}}} = \lim_{y=\infty} \frac{e^y}{e^{\sqrt{\left(\frac{11}{8}+y\right)\left(\frac{4}{3}+y\right)}}}$$
$$= e^{\lim\limits_{y=\infty}\left[y - y\sqrt{\left(1+\frac{11}{8y}\right)\left(1+\frac{4}{3y}\right)}\right]} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{8}+\frac{4}{3}\right)} = e^{-\frac{65}{48}}.$$

Le second membre de (8) tend donc, pour $q = \infty$, vers la limite positive

$$\beta = \left(e^{-\frac{65}{48}}\right)^6 - 6e^{-10} = e^{-\frac{65}{8}} - 6e^{-10} = e^{-10}\left(e^{\frac{15}{8}} - 6\right).$$

Donc, pour tous les q suffisamment grands ($q \geqq q_0$),

$$(9)\quad (1+\log^6 q)\,|\zeta(1+qi)| > \log^6 q\,|\zeta(1+qi)| > \frac{\beta}{2};$$

d'autre part, $\zeta(z)$ étant différent de 0 pour $R(z) = 1$, le premier membre de (9) est, pour $0 < q < q_0$, supérieur à une constante positive; il existe donc une constante positive α telle qu'on ait, pour tous les $q > 0$,

$$(1+\log^6 q)\,|\zeta(1+qi)| > \alpha,$$
$$|\zeta(1+qi)| > \frac{\alpha}{1+\log^6 q},$$

ce qu'il fallait démontrer.

En vertu de l'identité

$$|\zeta(1+qi)| = |\zeta(1-qi)| \qquad (q \gtrless 0),$$

on a, pour tous les $q \gtrless 0$,

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{\alpha}{1+\log^6|q|}.$$

Dans tous ces développements, je ne me suis appuyé que sur les propriétés les plus élémentaires de la fonction $\zeta(z)$. Je ne me suis pas servi du théorème important de M. Hadamard (publié en 1893) sur l'existence et la densité des racines imaginaires de $\zeta(z)$, ni même du fait, découvert déjà par Riemann, que la fonction $\zeta(z)$ existe dans tout le plan.