NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. JUHEL-RÉNOY

Sur le théorème de Ptolémée et son application aux polygones réguliers

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 12-17

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__12_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[K9b]

SUR LE THÉORÈME DE PTOLÉMÉE ET SON APPLICATION AUX POLYGONES RÉGULIERS;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

Il est d'usage, dans les Cours de Géométrie, d'appliquer le théorème de Ptolémée à la seule inscription des pentédécagones réguliers. Le but de cette Note est d'en faire l'application aux polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés, en particulier aux décagones et pentagones, et d'en déduire l'équation générale dont dépend l'inscription des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés.

I. Nous commencerons par donner, du théorème de Ptolémée, une démonstration qui se déduit immédiatement de la définition du rapport anharmonique.

Soient ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle et M un point de ce cercle. On a la relation

$$(\mathrm{M.BACD}) + (\mathrm{M.BCAD}) = 1.$$

Or, en grandeur et en signe,

$$(\mathrm{M.BACD}) = \frac{\sin \mathrm{CMB}}{\sin \mathrm{CMA}} : \frac{\sin \mathrm{DMB}}{\sin \mathrm{DMA}} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CA}} : \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DA}},$$

$$(\mathrm{M.BCAD}) = \frac{\sin \mathrm{AMB}}{\sin \mathrm{AMC}} : \frac{\sin \mathrm{DMB}}{\sin \mathrm{DMC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} : \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{DC}}$$

et, par suite,

$$\mathrm{CB.DA} + \mathrm{AB.DC} = \mathrm{AC.BD}.$$

II. Supposons la circonférence divisée en m parties égales et soient, dans le quadrilatère ABCD,

$n-p$	le nombre des divisions sous-tendues par			AB,
p	»	»	»	BC,
p	»	»	»	CD,
$n+p$	»	»	»	DA.

Le théorème de Ptolémée donne la formule

$$C_m^{n+p} + C_m^{n-p} = \frac{C_m^{2p}}{C_m^p} C_m^n. \tag{1}$$

La circonférence étant toujours divisée en m parties égales, supposons que les côtés du quadrilatère ABCD sous-tendent

AB	n	divisions
BC....................	p	»
CD	$n-p$	»
DA	$2n$	»

Le théorème de Ptolémée donne la formule

$$C_m^{n+p} - C_m^{n-p} = \frac{C_m^{2n}}{C_m^n} C_m^p. \tag{2}$$

Enfin, dans une troisième hypothèse, représentons par

p	le nombre des divisions sous-tendues par			AB,
$n-p$	»	»	»	BC,
n	»	»	»	CD,
$n+p$	»	»	»	DA.

Le théorème de Ptolémée donne la formule

$$C_m^{n+p} C_m^{n-p} = (C_m^n)^2 - (C_m^p)^2. \tag{3}$$

III. Appliquons ces formules à la division de la circonférence en dix parties égales; la formule (1) donne, pour $n = 5$ et $p = 4$,

$$C^1_{10} = \frac{C^1_5}{C^2_5} R,$$

puis, pour $n = 5$ et $p = 2$,

$$C^3_{10} = \frac{C^2_5}{C^1_5} R ;$$

d'où, par multiplication,

$$C^1_{10} C^3_{10} = R^2.$$

Dans la formule (2), faisons $n = 2$ et $p = 1$,

$$C^3_{10} - C^1_{10} = \frac{C^2_5}{C^1_5} C^1_{10} = R.$$

Ce sont les formules de l'inscription des décagones.

Quant aux pentagones, remplaçons, dans la formule (3), n par 2 et p par 1,

$$(C^1_5)^2 - (C^1_{10})^2 = C^1_{10} . C^3_{10} = R^2,$$

puis n par 4 et p par 3,

$$(C^2_5)^2 - (C^3_{10})^2 = C^1_{10} . C^3_{10} = R^2.$$

On déduit de ces formules la construction bien connue que voici :

Soient AC et BD deux diamètres rectangulaires d'un cercle de centre O ; de I milieu de AO, avec IB comme rayon, on trace une circonférence qui coupe AC en E et G, on a

$$OE = C^1_{10}, \qquad OG = C^3_{10}.$$
$$EB = C^1_5, \qquad GB = C^2_5.$$

Remarquons, en passant, la formule

$$(C^1_{10})^2 - (C^3_{10})^2 = (C^1_3)^2.$$

IV. Supposons, d'une manière générale, la circonference divisée en $2m$ parties égales et représentons par x le rapport $\frac{C_2}{C_1}$, en désignant, pour simplifier les notations, par C_k la longueur de la corde qui sous-tend K divisions. L'application de la relation (1) donne les équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
C_2 \qquad\qquad &= x C_1,\\
C_3 + C_1 \qquad &= x C_2,\\
C_4 + C_2 \qquad &= x C_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots,\\
C_{m-1} + C_{m-3} &= x C_{m-2},\\
2R + C_{m-2} \quad &= x C_{m-1},\\
C_{m-1} \qquad\quad &= R x,\\
C_m \qquad\qquad &= 2R;
\end{aligned}
$$

d'où l'on tire

$$
\begin{aligned}
C_m \quad &= 2R,\\
C_{m-1} &= Rx,\\
C_{m-2} &= (x^2 - 2)R,\\
C_{m-3} &= (x^3 - 3x)R,
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite. On voit, d'une manière générale, qu'en posant $C_k = RV_{m-k}$, trois polynomes V consécutifs satisfont, d'après ce qui précède, a la loi de récurrence

$$V_k + V_{k-2} = x V_{k-1}$$

avec les conditions $V_0 = 2$ et $V_1 = x$.

Or on a

$$C_2 = RV_{m-2} \qquad \text{et} \qquad C_1 = RV_{m-1},$$

$$C_2 = x C_1$$

et, par suite,

$$V_{m-2} - x V_{m-1} = 0;$$

d'ou l'on déduit

$$V_m = 0.$$

Telle est l'équation qui donne la solution du problème de la division de la circonférence en $2m$ parties égales.

Or on sait que les fonctions V jouissent de toutes les propriétés des fonctions de Sturm, qu'elles ont en particulier toutes leurs racines réelles et que l'équation $V_m = 0$ a une racine et une seule comprise entre la plus grande racine de $V_{m-1} = 0$ et $+\infty$. Il s'agit de démontrer que, pour chaque équation $V_m = 0$, la plus grande racine seule convient à la solution du problème.

Cela résulte immédiatement de ce que, d'après la valeur de

$$x = \frac{1}{R} C_{2m}^{m-1} = \frac{1}{R}\sqrt{4R^2 - (C_{2m}^1)^2},$$

x croît avec m et que, pour l'équation $V_2 = 0$ en particulier, c'est la plus grande racine qui convient.

V. On sait que les fonctions V ont toutes leurs racines comprises entre $+2$ et -2. D'après la forme même des fonctions V, dont tous les termes sont de même parité, il suffit que la plus grande racine de la fonction V_m soit inférieure à 2, et ceci est une conséquence de la relation

$$C_{2m}^{m-1} = Rx.$$

Il est même possible d'obtenir, pour la plus grande racine de la fonction V_m, une limite supérieure plus rapprochée que 2.

On démontre, en effet, facilement que la fonction V_m satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(x^2 - 4)V''_m + xV'_m - m^2 V_m = 0.$$

Or, Laguerre a démontré dans une Note : *Sur les equations algebriques dont le premier membre satisfait à une équation linéaire du second ordre,* qu'étant donné un polynome y ayant toutes ses racines réelles et satisfaisant à l'équation différentielle

$$Py'' + Qy' + Ry = 0,$$

le polynome

$$\Omega = PR + PQ' - QP' - \frac{m-2}{4(m-1)} Q^2,$$

où m désigne le degré du polynome y, a une valeur positive ou nulle quand on y remplace x par une racine quelconque du polynome y.

On a donc, dans le cas actuel, pour toute racine x de la fonction V_m,

$$x^2 = \frac{16(m-1)^2(m+1)}{(2m-1)(2m^2-m-2)},$$

$$x = 4(m-1)\sqrt{\frac{m+1}{(2m-1)(2m^2-m-2)}},$$

$$C_{2m}^{m-1} = 4R(m-1)\sqrt{\frac{m+1}{(2m-1)(2m^2-m-2)}}.$$

Signalons enfin la propriété suivante de la fonction V_m :

Si U_{m-1} représente le résultat de la substitution de la plus grande racine de V_m dans V_{m-1}, on a, pour $m = \infty$,

$$\lim(mU_{m-1}) = \pi.$$
