PERNOT
MOISSON

Sur la construction des courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 106-124
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__106_1>

[M[1]1b]

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR MM. PERNOT ET MOISSON,
Anciens élèves de l'École Polytechnique.

Pour étudier une courbe dont l'équation n'est pas résolue en y aux environs de l'un de ses points, auquel on a transporté l'origine, ou à l'infini, les méthodes généralement employées sont basées sur le calcul des infiniment petits. On est conduit, dans la pratique, à des calculs délicats, surtout lorsqu'on étudie une branche multiple singulière à l'origine, ou une branche parabolique multiple.

Cette étude se fait aisément lorsque x et y sont exprimés au moyen d'un paramètre, et très complètement lorsque la courbe est unicursale.

Les procédés que nous allons exposer consistent à remplacer la courbe proposée par une courbe dont l'équation est plus simple, ayant mêmes tangentes ou mêmes asymptotes au point considéré, et même position par rapport à ces droites. Dans la plupart des cas, la courbe auxiliaire peut être choisie unicursale et permet de tirer des conclusions immédiates; il en est ainsi lorsque la tangente étudiée est simple ou double.

Dans le cas d'une tangente multiple, on est conduit à la discussion d'une équation ordonnée suivant les puissances croissantes de $y - mx$, m étant le coefficient angulaire de la tangente.

En particulier, pour une équation de la forme

$$\Sigma x^{\alpha} y^{\beta} = 0,$$

on peut étudier de cette façon, par une méthode différente de celles de Puiseux et de Newton, les déterminations réelles de x et y aux environs de l'origine; les méthodes précitées restent préférables, dans le cas général, lorsqu'on veut déterminer plus exactement l'ordre de l'infiniment petit y ou x.

Nos procédés ont donc pour but d'obtenir le tracé correct d'une courbe aux environs d'un point; la même méthode s'applique à l'étude directe des branches infinies, sans avoir recours à la transformation homologique qui permettrait de les ramener à distance finie.

ÉTUDE D'UNE COURBE A L'ORIGINE.

Nous étudierons d'abord les deux cas d'une tangente simple et d'une tangente double, en discutant tous les cas qui peuvent se présenter.

1° *Tangente simple*. — Soit $y - mx = 0$ une tangente simple à l'origine, ce point étant d'ordre de multiplicité p. L'équation de la courbe pourra s'écrire

$$(y - mx)\psi(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \varphi_{p+2}(x, y) + \ldots = 0$$

ou

$$y - mx = -\frac{\varphi_{p+1}(x, y) + \varphi_{p+2}(x, y) + \ldots}{\psi(x, y)},$$

$\psi(x, y)$ étant un groupe homogène de degré $p - 1$ et $\varphi_{p+1}(x, y)$, $\varphi_{p+2}(x, y)$, ... étant également des groupes homogènes de degrés indiqués par l'indice. On a donc, en posant $\frac{y}{x} = t$,

$$y - mx = -\frac{x^2 \varphi_{p+1}(1, t) + x^3 \varphi_{p+2}(1, t) + \ldots}{\psi(1, t)}.$$

La position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par le signe de $y - mx$ quand x et y tendent vers 0 et t vers m. Si $\varphi_{p+1}(1, m) \neq 0$, le second membre qui est un polynome entier en x ordonné sera du signe de $-\frac{x^2 \varphi_{p+1}(1, m)}{\psi(1, m)}$ pour x suffisamment petit; $y - mx$ aura également ce signe.

La courbe considérée a donc à l'origine même tangente et même position par rapport à sa tangente que la courbe unicursale

$$y - mx = -\frac{x^2 \varphi_{p+1}(1, m)}{\psi(1, m)},$$

qui est une parabole.

La courbe proposée est d'un même côté par rapport à sa tangente, et du même côté que la courbe auxiliaire, dont l'équation sous forme entière est

$$(y - mx)\psi(1, m) + x^2 \varphi_{p+1}(1, m) = 0.$$

Supposons maintenant que $\varphi_{p+1}(1, m) = 0$ et que le premier groupe qui ne s'annule pas pour $x = 1$, $y = m$ soit $\varphi_{p+\lambda}(x, y)$. On met $y - mx$ en facteur dans tous les termes qui précèdent $\varphi_{p+\lambda}$. Le même raisonnement montre que $y - mx$ est du signe de

$$\frac{-x^{\lambda+1}\varphi_{p+\lambda}(1, m)}{\psi(1, m)}$$

et que la courbe considérée peut être remplacée par la courbe unicursale

$$y - mx = -\frac{x^{\lambda+1}\varphi_{p+\lambda}(1, m)}{\psi(1, m)}.$$

On a un contact d'ordre λ; inflexion graphique si λ est pair, point méplat si λ est impair. La courbe auxiliaire est

$$(y - mx)\psi(1, m) + x^{\lambda+1}\varphi_{p+\lambda}(1, m) = 0.$$

Elle s'obtient immédiatement en remplaçant dans chacun des groupes homogènes ψ, φ_{p+1}, ... de la courbe donnée, y par mx, puis en conservant seulement le terme en $y - mx$ suivi du premier terme qui ne s'annule pas identiquement.

Pratiquement, on étudie directement la position par rapport à la courbe dont nous venons d'étudier les propriétés en tirant $y - mx$ de l'équation.

On garde au numérateur le coefficient de la plus faible puissance de x; on constate le signe du dénominateur quand t tend vers m; on en déduit le signe de $y - mx$. On place la courbe dans la région telle que $y - mx$ ait le signe voulu.

Exemple :

$$(y+x)(y-2x)+2y^2x-8x^3+x^4-5x^2y^2-x^5+y^5=0.$$

Considérons la tangente $y - 2x = 0$:

$$y - 2x = \frac{-x^4+5x^2y^2+\ldots}{y+x+2(y+2x)x} = \frac{-x^4(1+5t^2)+\ldots}{x(1+t)+2x^2(2+t)}.$$

Quand t tend vers 2, $y - 2x$ a le signe de $-x^3$. On en conclut qu'il y a inflexion graphique; du côté des x positifs, le facteur $y - 2x$ est positif; il est positif du côté des x négatifs.

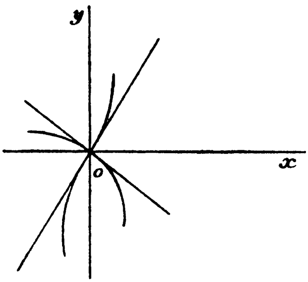
Pour l'autre tangente, on a

$$y + x = \frac{8x^3 - 2y^2x + \ldots}{y - 2x}.$$

Pour $y = -x$, $y + x$ a le signe de $-x^2$.

Donc la courbe est toujours du même côté de sa tangente (*fig.* 1).

Fig. 1.



2° *Tangente double.* — Considérons de même l'équation

$$(y - mx)^2 \psi_{p-2}(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \ldots = 0$$

a. Supposons d'abord $\varphi_{p+1}(1, m) \neq 0$. La tangente $y - mx = 0$ rencontre la courbe en $p + 1$ points seulement à l'origine, c'est-à-dire en un point de plus seulement qu'une sécante quelconque, et il ne peut y avoir qu'un arc de courbe d'un côté déterminé de la tangente. On a comme précédemment

$$(y - mx)^2 = -\frac{x^3 \varphi_{p+1}\left(1, \dfrac{y}{x}\right) + \ldots}{\psi_{p-2}\left(1, \dfrac{y}{x}\right)},$$

quand x et y tendent vers o et $t = \frac{y}{x}$ vers m, le second membre a le signe de $-\frac{x^3 \varphi_{p+1}(1, m)}{\psi_{p-2}(1, m)}$. Les points de la courbe sont placés par rapport à la tangente double de la même façon que ceux de la cubique unicursale

$$(y - mx)^2 = -\frac{x^3 \varphi_{p+1}(1, m)}{\psi_{p+2}(1, m)};$$

il y a rebroussement de première espèce.

Pratiquement, on opère comme précédemment en tirant $(y - mx)^2$ pour avoir son signe quand x tend vers zéro et $\frac{y}{x}$ vers m, c'est-à-dire en remplaçant y par mx.

Exemple. — Soit la courbe

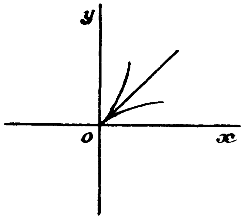
$$(y + x)(y - x)^2 + y^4 - 4x^3y - x^5 = 0,$$

on a

$$(y - x)^2 = \frac{4x^3y - y^4 + \dots}{y + x}.$$

En remplaçant y par x, on voit que le signe est celui de $\frac{3x^4}{2x}$, c'est-à-dire de x; il faut donc que x soit positif pour que les points de la courbe soient réels; il y a rebroussement de première espèce du côté des x positifs (*fig.* 2).

Fig. 2.



Remarque. — La méthode s'applique évidemment si $m = 0$, c'est-à-dire si la tangente est l'axe Ox; dans le cas où m est infini, pour avoir la position par rapport à Oy, il suffit de tirer x pour une tangente simple, x^2 pour une tangente double, en remplaçant $\frac{x}{y}$ par zéro pour avoir le signe.

Soit

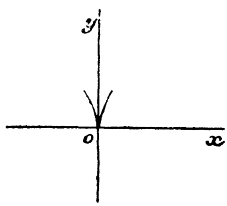
$$x^2(y-x)+x^4-2y^4-x^5=0,$$

on a

$$x^2=\frac{2y^4-x^4+\ldots}{y-x}=\frac{y^4}{y}\,\frac{\left(2-\frac{x^4}{y^4}\right)+\ldots}{\left(1-\frac{x}{y}\right)},$$

x^2 a le signe de y; il y a donc rebroussement de première espèce du côté des y positifs (*fig.* 3).

Fig. 3.



b. Supposons maintenant

$$\varphi_{p+1}(1,m)=0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_{p+2}(1,m)\neq 0.$$

On peut alors poser

$$\varphi_{p+1}(x,y)=(y-mx)\,\psi_p(x,y).$$

L'équation de la courbe proposée devient

$$(y-mx)^2\,\psi_{p-2}(x,y)$$
$$+(y-mx)\,\psi_p(x,y)+\varphi_{p+2}(x,y)+\ldots=0$$

ou

$$(y - mx)^2 \psi_{p-2}(1, t) + x^2(y - mx)\psi_p(1, t)$$
$$+ x^4 \varphi_{p+2}(1, t) + x^{q+2} \varphi_{p+q}(1, t) + \ldots = 0,$$

$\varphi_{p+q}(x, y)$ étant le premier groupe homogène qui suit $\varphi_{p+2}(x, y)$, ou encore

$$(y - mx - \alpha' x^2)(y - mx - \alpha'' x^2) + \frac{x^{q+2} \varphi_{p+q}(1, t)}{\psi_{p-2}(1, t)} + \ldots = 0,$$

α' et α'' étant les racines de l'équation

$$\alpha^2 \psi_{p-2}(1, t) + \alpha \psi_p(1, t) + \varphi_{p+2}(1, t) = 0$$

et ayant respectivement pour limites, quand x et y tendent vers 0 et t vers m, les racines a' et a'' de l'équation

$$(1) \qquad a^2 \psi_{p-2}(1, m) + a \psi_p(1, m) + \varphi_{p+2}(1, m) = 0.$$

Il existe alors des points de la courbe pour lesquels on a identiquement

$$y - mx = \alpha' x^2 - \frac{x^{q+2} \varphi_{p+q}(1, t) + \ldots}{(y - mx - \alpha'' x^2)\psi_{p-2}(1, t)}.$$

Par suite, le second membre est du signe de $\alpha' x^2$, qui est celui de $a' x^2$. Donc la parabole

$$y - mx = a' x^2$$

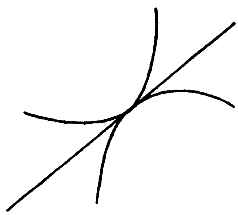
a même tangente et est placée par rapport à cette tangente du même côté que l'arc de courbe considérée. On peut donc encore remplacer la courbe par le faisceau des deux paraboles

$$(y - mx - a' x^2)(y - mx - a'' x^2) = 0,$$

la position de la courbe par rapport à chacune d'elles étant donnée par le signe de $\varphi_{p+q}(1, m)$ et de $\psi_{p-2}(1, m)$.

Si a' et a'' sont réels et de signe contraire, on a un contact double de part et d'autre de la tangente (*fig.* 4).

Fig. 4.



Si a' et a'' sont réels et de même signe, mais distincts, on a un contact double du même côté de la tangente (*fig.* 5).

Fig. 5.

Si a' et a'' sont deux racines imaginaires, on a un point double isolé.

Enfin, si a' et a'' sont deux racines égales, on a, à la limite,

$$(y - mx - ax^2)^2 = - \frac{x^{q+2}\,\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi(1, m)},$$

qui est encore la courbe auxiliaire, $\varphi_{p+q}(1, t)$ étant la première fonction qui ne s'annule pas pour $t = m$. Si q est impair, on a un rebroussement de seconde espèce; si q est pair, point double isolé lorsque $\frac{\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi(1, m)} > 0$

et contact double d'un même côté de la tangente lorsque $\frac{\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi(1, m)} < 0$, chaque branche de courbe pouvant être remplacée par l'une des deux courbes explicites

$$y = mx + ax^2 \pm x^{\frac{q}{2}+1}\sqrt{-\frac{\varphi_{p+q}(1, m)}{\psi(1, m)}}.$$

La parabole $y = mx + ax^2$ sépare les deux branches de courbe, qui lui sont tangentes, l'une intérieurement et l'autre extérieurement.

La méthode étant ainsi théoriquement justifiée, voici comment on peut opérer dans la pratique. Soit la courbe

$$\begin{gathered}(y - x)^2 (y^2 + x^2) \\ - 2(y - x)(y^4 + x^3 y) + y^6 - 4x^7 + 2y^7 = 0;\end{gathered}$$

on prend tous les termes contenant $y - x$ en facteur, plus les termes de plus bas degré qui suivent immédiatement

$$(y - x)^2 (y^2 + x^2) - 2(y - x)(y^4 + x^3 y) + y^6.$$

En remplaçant, dans les coefficients de $y - x$, y par x, et en divisant par x^2, on a l'équation

$$2(y - x)^2 - 4x^2(y - x) + x^4 = 0,$$

qui peut s'écrire en décomposant en carrés

$$(y - x - x^2)^2 - \frac{x^4}{2} = 0.$$

La position des branches de la courbe est donnée par celle des paraboles

$$y - x - x^2 = \pm \frac{x^2}{\sqrt{2}},$$

$$y - x = x^2\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

On voit que les deux branches sont du côté où $y - x$ est positif.

c. Supposons φ_{p+1} non identiquement nul, mais $\varphi_{p+1}(1, t)$ nul ainsi que $\varphi_{p+2}(1, t)$ et soit $\varphi_{p+q}(1, t)$ la première fonction ne s'annulant pas pour $t = m$. On a, comme précédemment,

$$(y - mx)^2 \psi_{p-2}(1, t) + x^2(y - mx)\psi_p(1, t)$$
$$+ x^4 \varphi_{p+2}(1, t) + \ldots + x^{q+2}\varphi_{p+q}(1, t) + \ldots = 0$$

ou, en posant $\alpha = -\dfrac{\psi_p(1, t)}{2\psi_{p-2}(1, t)}$, α ayant pour limite $a = -\dfrac{\psi_p(1, m)}{2\psi_{p-2}(1, m)}$,

$$(y - mx - \alpha x^2)^2$$
$$- x^4\left(\alpha^2 - \frac{\varphi_{p+2}(1, t)}{\psi_{p-2}(1, t)}\right) + \ldots + \frac{x^{q+2}\psi_{p+q}(1, t)}{\psi_{p-2}(1, t)} + \ldots = 0$$

ou

$$(y - mx - \alpha x^2)^2$$
$$= \alpha^2 x^4 - \frac{x^4\varphi_{p+2}(1, t) + \ldots + x^{q+2}\psi_{p+q}(1, t) + \ldots}{\psi_{p-2}(1, t)}.$$

Si $a \neq 0$, c'est-à-dire $\psi_p(1, m) \neq 0$ [en d'autres termes, si m est racine simple de $\varphi_{p+1}(1, t) = 0$], le second membre est du signe de $\alpha^2 x^4$, donc positif; il y a encore deux branches de courbe du même côté de la tangente. La courbe auxiliaire devient

$$(y - mx - ax^2)^2 = a^2x^4 - x^{q+2}\frac{\psi_{p+q}(1, m)}{\psi_{p-2}(1, m)}$$

ou

$$y = mx + ax^2 \pm x^2\sqrt{a^2 - x^q\frac{\psi_{p+q}(1, m)}{\psi_{p-2}(1, m)}}.$$

Si $a = 0$, c'est-à-dire si a est racine double de

$\varphi_{p+1}(1, t) = 0$, on aura

$$(y - mx)^2 [\psi_{p-2}(1, t) + x\psi'_p(1, t)] \\ + x^3(y - mx)\varphi_{p+2}(1, t) + \ldots,$$

et l'on sera, comme précédemment, ramené à l'étude d'une courbe auxiliaire de la forme

$$y = mx + a_1 x^3 \pm \sqrt{} \qquad \text{avec} \qquad a_1 = \frac{\varphi_{p+2}(1, m)}{2\psi_{p-2}(1, m)},$$

et ainsi de suite.

d. Enfin, supposons φ_{p+1} identiquement nul, ainsi que $\varphi_{p+2}, \ldots,$ jusqu'à φ_{p+r-1} inclusivement. On aura

$$(y - mx)^2 \psi_{p-2}(x, y) + \varphi_{p+r}(x, y) + \ldots = 0.$$

On obtient immédiatement, comme précédemment, la courbe auxiliaire

$$(y - mx)^2 = -\frac{x^{r+2}\varphi_{p+r}(1, m)}{\psi_{p-2}(1, m)},$$

en supposant $\varphi_{p+r}(1, m) \neq 0$.

Si r est impair, rebroussement de première espèce.

Si r est pair, point double isolé ou deux branches de part et d'autre de la tangente qu'on peut remplacer par les branches de la courbe :

$$y = mx \pm x^{\frac{r}{2}+1}\sqrt{-\frac{\varphi_{p+r}(1, m)}{\psi_{p-2}(1, m)}}.$$

e. Si $\varphi_{p+r}(1, m) = 0$, on a

$$\varphi_{p+r}(x, y) = (y - mx)\psi_{p+r-1}(x, y).$$

On est comme précédemment amené à considérer la courbe

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(y - mx)^2 \psi_{p-2}(1, m) \\ &\quad + x^{r+1}(y - mx)\psi_{p+r-1}(1, m) \\ &\qquad\qquad + x^{r+\alpha+2}\varphi_{p+r+\alpha}(1, m) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si $\alpha = r$, on peut encore comme plus haut remplacer la courbe proposée par le faisceau de deux courbes unicursales de la forme

$$(y - mx + a'x^{r+1})(y - mx + a''x^{r+1}) = 0,$$

et si $\alpha > r$, par une courbe

$$(y - mx - ax^{r+1})^2 = a^2x^{2(r+1)} - \mathrm{A}x^{2(r+1)+q};$$

résultats analogues à ceux trouvés précédemment.

Si $\alpha < r$, soit $\alpha = r - h$; l'équation (2) est de la forme

$$(y - mx)^2 + 2\mathrm{A}x^{r+1}(y - mx) + \mathrm{B}x^{2r+2-h} = 0$$

ou

$$y - mx = -\mathrm{A}x^{r+1} \pm \sqrt{x^{2r+2-h}(\mathrm{A}^2x^h - \mathrm{B})}.$$

Si h est impair, le radical n'est réel que pour des valeurs de x d'un signe déterminé, il y a rebroussement de première ou de seconde espèce suivant la parité de r.

Si h est pair; deux cas : $\mathrm{B} > 0$ point double isolé, et si $\mathrm{B} < 0$ deux branches de courbe réelles d'un même côté de la tangente et de part et d'autre de la courbe

$$y = mx - \mathrm{A}x^{r+1}.$$

Tangentes multiples. — La discussion complète serait trop longue; les considérations précédentes suffisent pour justifier les procédés pratiques suivants :

On prend tous les termes, à partir de ceux de moindre degré, contenant $y - mx$ en facteur; on prend de plus l'ensemble des termes de degré supérieur qui suivent immédiatement, en laissant de côté tous les autres termes; la courbe ainsi obtenue possède à l'origine, au point de vue de la tangente considérée, les mêmes propriétés que la courbe proposée. On remplace y par mx dans les coefficients de $y - mx$ et dans les derniers termes conservés. On a ainsi une équation en $y - mx$ dont on étudie les racines au point de vue de la réalité et du signe, aux environs de l'origine. On en conclut la position des diverses branches de courbe réelles. Nous supposerons d'abord un cas où l'équation peut s'étudier complètement, par les procédés ordinaires.

Exemple. — Soit la courbe

$$x^3(y-x)^3(y-2x)^2 + x^8(y-x) - x^3y^7 + 2y^{11} - x^{12} = 0.$$

Pour étudier la position par rapport à la tangente

$$y - x = 0,$$

il suffit de conserver les termes

$$x^3(y-x)^3(y-2x)^2 + x^8(y-x) - x^3y^7 = 0.$$

En remplaçant y par x dans les coefficients, on a

$$(y-x)^3 + x^3(y-x) - x^5 = 0,$$

que nous considérons comme une équation du troisième degré en $y - x$.

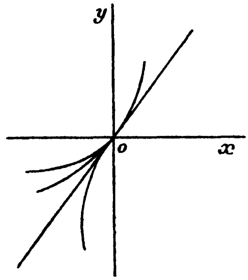
La condition de réalité des trois racines est

$$4x^9 + 27x^{10} < 0.$$

Quand x tend vers zéro cette expression a le signe de x. Donc, du côté des x positifs, il y a une seule valeur réelle pour $y - x$; cette valeur est positive; donc la courbe est du côté $y - x > 0$.

Pour $x < 0$ et suffisamment petit, on a trois branches réelles; l'équation ayant deux variations, il y a deux branches telles que $y - x$ soit positif et une branche telle que $y - x < 0$; il y a donc une branche ordinaire et un rebroussement de première espèce (*fig.* 6).

Fig. 6.



L'étude de la tangente double $(y - 2x)^2 = 0$ rentre dans un cas déjà traité par un exemple. Cherchons les branches tangentes à Oy.

Conservons tous les termes jusqu'à y^{11}; on peut écrire l'équation ainsi réduite, pour faire apparaître $\frac{x}{y}$,

$$x^3\left[y^3\left(1 - \frac{x}{y}\right)^3 y^2\left(1 - \frac{2x}{y}\right)^2 + x^5\left(1 - \frac{x}{y}\right) - y^7\right] + 2y^{11} = 0.$$

L'équation sera nécessairement de la forme binome, puisqu'il n'y a pas de termes, après le premier, contenant x à une puissance inférieure à trois.

Cette équation se réduit à

$$x^3(1 - y^2) + 2y^6 = 0.$$

On voit que x^3 a le signe de $-y^6$; il y a donc une seule branche de courbe réelle tangente à Oy du côté des x négatifs.

Cas général. — Soit une courbe ayant à l'origine un point multiple, les termes de moindre degré contenant y^p en facteur.

Les considérations justifiées précédemment nous permettent, après avoir ordonné l'équation par rapport aux puissances décroissantes de y, et remplacé, dans les coefficients, $\frac{y}{x}$ par zéro, de nous limiter à l'étude d'une équation de la forme

$$y^p + Ay^{p-1}x^a + By^{p-2}x^b + \ldots + Lyx^l + Kx^m = 0.$$

Pour étudier la réalité des racines lorsque x tend vers zéro, après avoir tenu compte des lacunes possibles, on examine le cas $x > 0$; la transformée en $-x$ permet ensuite d'étudier de même le cas $x < 0$.

On est conduit à substituer à y des valeurs tendant vers zéro en même temps que x, c'est-à-dire de la forme x^λ, ce qui donne

$$x^{p\lambda} + Ax^{a+\lambda(p-1)} + Bx^{b+\lambda(p-2)} + \ldots + 4x^{l+\lambda} + Kx^m.$$

Pour x suffisamment petit, le signe de cette expression sera celui du coefficient de la plus faible puissance de x. Il suffit de voir quelles valeurs on peut donner à λ pour que les résultats des substitutions soient de signes alternés.

Dans la pratique, en s'aidant de l'examen des variations de l'équation, il est aisé d'apercevoir les valeurs utiles de λ, comme nous le montrerons sur un exemple; dans le cas le plus général, on peut régler les tâtonnements de la manière suivante :

Prenons deux axes de coordonnées $O\lambda$, Oz et figurons les droites

$$z = p\lambda, \qquad z = a + \lambda(p-1), \qquad \ldots, \qquad z = l + \lambda, \qquad z = m,$$

qui représentent les variations des exposants, en marquant sur les droites le signe $+$ ou $-$ suivant le signe du coefficient correspondant; ces droites ont des coefficients angulaires p, $p-1$, ... positifs et décroissants.

On voit aisément, quand λ varie, les régions où l'on peut trouver des signes alternés, et l'on en conclut le nombre de branches réelles. Ces régions sont séparées par les points de rencontre des droites deux à deux.

Pour étudier les branches négatives, toujours du côté des x positifs, on opère de même en substituant $-x^\lambda$.

Exemple :

$$y^4(y-x)^2+2y^2(y+x)^5+yx^7+x^{10}=0.$$

On est amené à étudier l'équation

$$\begin{aligned} y^4x^2+2y^2x^5+yx^7+x^{10}&=0,\\ y^4 \quad +2y^2x^3+yx^5+x^8 \ &=0. \end{aligned}$$

Pour $x>0$, on a au plus deux racines réelles et négatives, comme l'indiquent la lacune et le nombre des variations. La substitution $y=0$ donne le signe de x^8 qui est positif. Substituons $-x^\lambda$,

$$x^{4\lambda}+2x^{3+2\lambda}-x^{\lambda+5}+x^8.$$

Construisons les droites

$$z=4\lambda,\qquad z=3+2\lambda,\qquad z=\lambda+5,\qquad z=8,$$

et marquons sur ces droites les signes des coefficients (*fig.* 7).

Pour que les deux branches possibles soient réelles, il faut que $x^{\lambda+5}$ donne son signe; il suffit pour cela de prendre λ entre a et b, le z de la droite marquée du signe $-$ sera le plus petit.

On voit ainsi que λ est compris entre 2 et 3; la courbe $y = -x^\lambda$ sépare les deux branches réelles de la courbe du côté des y négatifs.

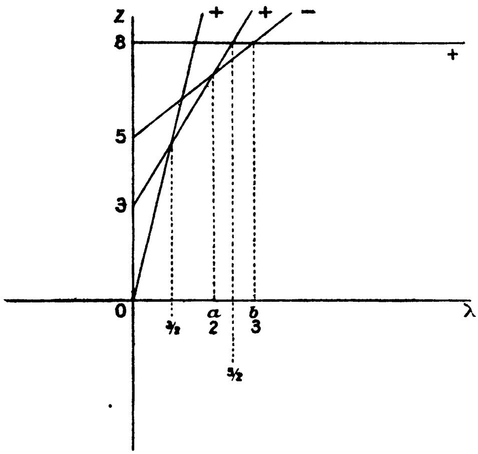
Pour $x < 0$, formons la transformée en $-x$

$$y^4 - 2y^2x^3 - yx^5 + x^8 = 0.$$

Il peut y avoir deux branches réelles positives

$$y = 0 \qquad \text{donne le signe } +.$$

Fig. 7.



Substituons $y = x^\lambda$,

$$x^{4\lambda} - 2x^{2\lambda+3} - x^{\lambda+5} + x^8,$$

et construisons

$$z = 4\lambda, \qquad z = 2\lambda + 3, \qquad z = \lambda + 5, \qquad z = 8.$$

En changeant le signe de la deuxième droite sur la figure précédente, on voit qu'il suffit de prendre

$$\frac{3}{2} < \lambda < \frac{5}{2}$$

pour avoir un résultat de substitution négatif. Il y a donc deux branches positives réelles séparées par $y = x^2$, par exemple.

Pour étudier les racines négatives, substituons $y = -x^\lambda$,

$$x^{4\lambda} - 2x^{2\lambda+3} + x^{\lambda+5} + x^8;$$

on a le signe négatif pour

$$2 < \lambda < \frac{5}{2}.$$

Donc les deux branches négatives sont réelles.

On voit aisément que le procédé est général. En construisant exactement les droites $z = a\lambda + b$ on peut, sans calculer les valeurs de λ, voir s'il est possible de trouver une ordonnée rencontrant ces droites en des points correspondant aux signes cherchés. La méthode est la même pour étudier le nombre des branches réelles et leur position par rapport à une tangente multiple $y - mx = 0$. (*A suivre.*)