Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 86-95

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__86_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

589.

(1861, p. 141 et 1900, p. 189.)

Un polygone d'un nombre pair de côtés étant inscrit dans une conique, si l'on mène par son centre des parallèles à chaque côté du polygone, de manière à former un parallélogramme en chacun de ses sommets, la somme des mesures des parallélogrammes de rang pair est égale à la somme des mesures des parallélogrammes de rang impair. (FAURE.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soient D et D' deux droites dont les équations respectives sont (axes rectangulaires ou non)

$$lx + my = 1,$$
$$l'x + m'y = 1.$$

Le parallélogramme obtenu en menant par l'origine des parallèles à ces droites a pour aire

$$\frac{1}{lm' - ml'},$$

à un facteur constant près.

Cela posé, prenons pour axes de coordonnées les asymptotes de la conique donnée. Son équation sera

$$xy = 1,$$

en choisissant convenablement l'unité de longueur.

Soient

$$\left(x_1, \frac{1}{x_1}\right), \quad \left(x_2, \frac{1}{x_2}\right), \quad \ldots, \quad \left(x_{2m}, \frac{1}{x_{2m}}\right),$$

les coordonnées des $2m$ sommets du polygone considéré. Le côté joignant les sommets i et $i+1$ a pour équation

$$\frac{1}{x_i + x_{i+1}} x + \frac{x_i x_{i+1}}{x_i + x_{i+1}} y = 1,$$

et l'inverse de l'aire du parallélogramme correspondant au sommet i a pour valeur, à un facteur constant près,

$$\frac{x_i x_{i+1} - x_{i-1} x_i}{(x_{i-1} + x_i)(x_i + x_{i+1})} = -\frac{x_{i-1}}{x_{i-1} + x_i} + \frac{x_{i+1}}{x_i + x_{i+1}}.$$

La proposition à démontrer résulte donc de l'égalité

$$-\frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_3}{x_2 + x_3} - \frac{x_3}{x_3 + x_4} + \frac{x_5}{x_4 + x_5} - \ldots$$
$$= -\frac{x_2}{x_2 + x_3} + \frac{x_4}{x_3 + x_4} - \frac{x_4}{x_4 + x_5} + \frac{x_6}{x_5 + x_6} - \ldots,$$

qui se vérifie immédiatement par réunion des termes ayant même dénominateur.

1978.

(1903, p. 432.)

Nous dirons que les quatre pieds des normales abaissées sur une conique d'un point quelconque de son plan forment un QUADRANGLE D'APOLLONIUS.

Quatre points pris arbitrairement dans un plan ne forment pas en général un quadrangle d'Apollonius.

Démontrer que, si quatre points forment un quadrangle d'Apollonius, il en est de même des orthocentres des quatre triangles qui ont pour sommets les points donnés pris trois à trois. (R. BRICARD.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Un quadrangle d'Apollonius est déterminé par l'intersection d'une hyperbole équilatère H et d'une conique E qui a son centre sur H et ses axes parallèles aux asymptotes de H.

Réciproquement, l'intersection de deux coniques H et E satisfaisant à ces conditions détermine un quadrangle d'Apollonius.

Par suite, pour que quatre points (A, B, C, D) forment un tel quadrangle, il faut et il suffit que par ces quatre points on puisse faire passer deux coniques H et E, associées comme il vient d'être dit. Ce qui n'a pas lieu en général.

Cela étant, prenons pour axes de coordonnées les asymptotes de l'hyperbole équilatère passant par (A, B, C, D).

Soient

$$xy - k^2 = 0 \tag{1}$$

l'équation de cette hyperbole, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées des quatre points, coordonnées satisfaisant à (1).

L'équation générale des coniques E associées à H est alors

$$a(x-\alpha)^2 + b\left(y - \frac{k^2}{\alpha}\right)^2 - 1 = 0, \tag{2}$$

où a, b, α sont des paramètres variables.

(A, B, C, D) formeront un quadrangle d'Apollonius, si l'on peut déterminer ces paramètres de façon que (2) passe par les points donnés.

L'équation aux x des points d'intersection de (1) et de (2) est

$$(a\alpha^2 x^2 + bk^4)(x-\alpha)^2 - \alpha^2 x^2 = 0. \tag{3}$$

Écrivant les relations entre les coefficients et les racines, on voit que l'on doit avoir

$$\frac{\sum x_1 \sum x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \sum x_1 \sum \frac{1}{x_1} = 4$$

ou

$$\sum \frac{x_1}{2} \sum \frac{y_1}{2} - k^2 = 0,$$

relation exprimant que le point, symétrique du centre de H par rapport au centre de gravité des quatre points, appartient à l'hyperbole H.

On sait (ERNEST DUPORCQ, *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 66) que les orthocentres des triangles déterminés par les quatre points pris trois à trois sont sur (1).

Si l'on désigne par (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3), (x'_4, y'_4) les coordonnées des orthocentres des triangles (BCD), (CDA), (DAB) et (ABC), on voit sans difficulté que

$$x'_1 = -\frac{k^4}{x_1 x_2 x_3 x_4} x_1,$$

$$y'_1 = -\frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{k^2} \frac{1}{x_1} = -\frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{k^4} y_1,$$

d'où

$$\sum \frac{x'_1}{2} \sum \frac{y'_1}{2} = \sum \frac{x_1}{2} \sum \frac{y_1}{2} = k^2,$$

qui exprime que les quatre orthocentres forment un quadrangle d'Apollonius. C. Q. F. D.

Remarque. — Si l'on désigne par O le centre de H, par I celui de E, les relations entre les racines et les coefficients de l'équation (3) montrent que le centre de gravité des points (A, B, C, D) est au milieu de OI.

1993.

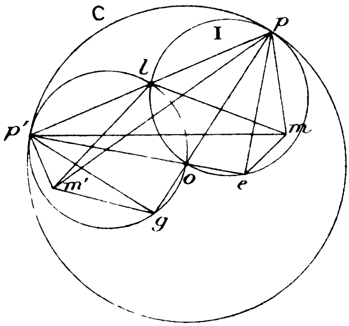
(1904, p. 144 et 478.)

Soient m et m' deux points d'une ellipse E. *Sur la normale en m, on porte, extérieurement à l'ellipse, une longueur mp, égale au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en m. Soit p' le point analogue que l'on peut construire sur la normale en m'. Démontrer que, si la tangente en m' contient le point p, la tangente en m' contient le point p'.* (R. BRICARD.)

AUTRE SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. A. MANNHEIM.

Supposons que les points m et m' soient arbitraires. Du point o comme centre décrivons le cercle C qui passe par p et p'. Lorsque le cercle I de diamètre op roule à l'intérieur de C le point m décrit l'ellipse E, qui a pour normale en m la droite mp. Menons la droite $p'o$ qui coupe I au point e. Quand I roule, le point e décrit la droite eop'. Lorsque e est en p', le cercle I devient le cercle de diamètre op'. Menons la



droite pog qui est le diamètre décrit par p entraîné avec I. On a

$$pg = p'e.$$

La corde pe vient prendre la position gp' et le triangle pme vient en $gm'p'$. On peut amener le triangle pme en coïncidence avec $gm'p'$ au moyen d'une simple rotation. Le centre de rotation est à la rencontre de la perpendiculaire à pg élevée au milieu de ce segment et de la perpendiculaire à $p'e$ élevée au milieu de ce segment, il est alors au milieu l de pp'. On voit ainsi que les segments lm, lm' sont égaux et l'on peut dire :

Soient m et m' deux points arbitraires d'une ellipse. Les points p et p' étant déterminés, comme il a été dit précédemment, les points m et m' sont à égales distances du milieu du segment pp'.

Si l'angle pmp' est droit, on a

$$lp = lm,$$

et par suite du dernier théorème on a aussi

$$lp = lm',$$

d'où il résulte que l'angle $pm'p'$ est droit aussi. En d'autres termes, si $p'm$ est tangente à E, la droite pm' est aussi tangente à cette courbe.

Remarques. — Le dernier théorème peut être énoncé ainsi :

On prend les arcs interceptés sur les cercles de Chasles par les normales en m et m' extérieures (ou intérieures) à l'ellipse, les milieux des cordes sous-tendues par ces arcs sont sur la perpendiculaire élevée à mm' du milieu de cette corde.

On peut ajouter que *les cordes sous-tendues,* dont il vient d'être parlé, *sont tangentes à la parabole* [1], *tangente à mm', aux normales à* E *en ces points, aux axes de* E, *et à d'autres droites.*

1998.

(1904, p. 240.)

Calculer le déterminant

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 & C_2^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & \dots & 0 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 1 & C_m^2 & C_m^3 & C_m^4 & \dots & C_m^m \\ 1 & C_{m+1}^2 & C_{m+1}^3 & C_{m+1}^4 & \dots & C_{m+1}^m \end{vmatrix}.$$

(C. Bourlet.)

---

(1) Sur cette parabole, voir *The Messenger of Mathematics,* juillet 1890.

SOLUTION

Par M. LETIERCE

Retranchant successivement les elements de chaque ligne des elements correspondants de la suivante, et tenant compte des relations

$$C_m^p = C_{m-1}^p + C_{m-1}^{p-1},$$
$$C_{k+1}^{k+1} = C_k^k,$$

on obtient

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 & C_2^2 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \\ 0 & C_m^1 & C_m^2 & C_m^3 & & C_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} C_2^1 & C_2^2 & 0 & 0 & & 0 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & & 0 \\ C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & 0 \\ & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_m^1 & C_m^2 & C_m^3 & C_m^4 & & C_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

Retranchant encore chaque ligne de la suivante, et developpant le determinant obtenu par rapport aux elements de la premiere ligne, on trouve

$$D_m = 2 \begin{vmatrix} C_2^1 & C_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & 0 \\ & & & & \cdot \\ C_{m-1}^1 & C_{m-1}^2 & C_{m-1}^3 & C_{m-1}^4 & C_{m-1}^{m-2} \end{vmatrix} - D_{m-2}$$

ou, en tenant compte de la relation (1),

$$D_m = 2 D_{m-1} - D_{m-2},$$

d'ou

$$D_{m-1} = 2 D_{m-2} - D_{m-3}$$

et, par suite,

$$D_m = 3 D_{m-2} - 2 D_{m-3},$$

et, d'une façon generale, par un raisonnement bien connu,

$$D_m = (p+1) D_{m-p} - p D_{m-(p+1)}.$$

On en tire

$$D_m = (m-2)D_3 - (m-3)D_2;$$

or

$$D_2 = 2, \qquad D_3 = 3,$$

d'où l'on conclut

$$D_m = m.$$

2000.

(1904, p. 336.)

On considère une ellipse E. *Les cercles ayant pour diamètres les cordes parallèles au grand axe enveloppant une ellipse* E_1; *les cercles ayant pour diamètres les cordes parallèles au petit axe de* E *enveloppant une ellipse* E_2. *Pour toutes les ellipses* E *homofocales, le lieu des points de rencontre de* E_1 *et* E_2 *se compose de deux cubiques.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. L. Troin.

Rapportons l'ellipse à ses axes, et soit

$$y = b\sin\varphi$$

l'équation d'une parallèle au grand axe. Le cercle qui admet cette corde pour diamètre a pour équation

$$x^2 + y^2 - 2b\sin\varphi y + b^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi = 0$$

et son enveloppe E_1 a pour équation

$$(1) \qquad (a^2+b^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2+b^2).$$

On obtiendra de même pour l'équation de E_2

$$(2) \qquad b^2x^2 + (a^2+b^2)y^2 = b^2(a^2+b^2).$$

On tire des équations (1) et (2)

$$(3) \qquad x\sqrt{a^4 - b^4 + a^2b^2} = \pm a^2\sqrt{a^2+b^2},$$

$$(4) \qquad y\sqrt{a^4 + b^4 - a^2b^2} = \pm b^2\sqrt{a^2+b^2}.$$

Prenons d'abord le même signe dans les deux seconds membres des équations (3) et (4). Nous en déduirons

$$(5)\qquad (x-y)\sqrt{a^4+b^4+a^2b^2} = \pm c^2\sqrt{a^2+b^2}$$

et, d'autre part, en divisant

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2},$$

d'où

$$a^2 = \frac{c^2 x}{x-y}, \qquad b^2 = \frac{c^2 y}{x-y}.$$

Remplaçant dans l'équation (6) a^2 et b^2 par leurs valeurs, on obtient

$$c^2\sqrt{x^2+y^2+xy} = \pm c^3\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$$

Élevant au carré, on a pour équation du lieu

$$(x-y)(x^2+y^2+xy) - c^2(x+y) = 0.$$

Si l'on avait choisi des signes différents devant les seconds membres des équations (3) et (4) on aurait obtenu la seconde partie du lieu. C'est la cubique

$$(x+y)(x^2+y^2-xy) - c^2(x-y) = 0.$$

La première de ces cubiques passe par les foyers réels et imaginaires de l'ellipse, son asymptote réelle est la bissectrice

$$x-y=0,$$

l'origine qui est point d'inflexion admet la tangente

$$x+y=0.$$

La seconde cubique est symétrique de la première par rapport aux axes. Tous ces résultats sont évidents sur les équations.

Autres solutions de MM. TABAKOFF, ALVAREZ UDE et LETIERCE.

2002.

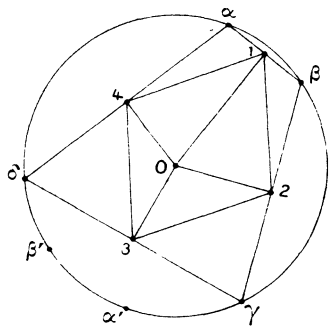
(1904, p. 528.)

On considère dans un plan un quadrilatère ABCD *circonscrit à un cercle de centre* O. *On mène, par les points* A, B, C, D *des perpendiculaires aux droites* OA, OB, OC, OD. *Le point* O *est sur la directrice de la parabole qui touche les quatre droites ainsi obtenues.* (R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Si α, β, γ, δ sont respectivement les points de contact des côtés DA, AB, BC, CD et 1, 2, 3, 4 les milieux des segments



$\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$, la parabole de l'énoncé est la polaire réciproque, par rapport au cercle de la conique (1, 2, 3, 4, O). Cette dernière conique est une hyperbole équilatère et les deux tangentes menées par O à la parabole, étant les perpendiculaires aux asymptotes, sont orthogonales; donc, le point O est sur la directrice.

Pour démontrer que (1, 2, 3, 4, O) est hyperbole équilatère il suffit d'observer que, en appelant α', β' les points diamétralement opposés à α, β, les angles $\beta\delta\alpha'$, $\alpha\gamma\beta'$ sont égaux, donc

$$\widehat{14O} = \widehat{12O}$$

et les deux faisceaux 4(1, O, 3), 2(1, O, 3) sont inversement égaux.