NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 557-564

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__557_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL.

Besançon

EPREUVE ECRITE — *Soit* C *un cercle fixe dont le centre est a l'origine et* $f(u)$ *une fonction analytique uniforme ne presentant que des singularites isolees dont aucune ne se trouve sur la circonference* C.

1° *Demontrer que*

$$F(z) = \int e^{uz} f(u)\,du,$$

l'integrale etant prise sur le cercle C *dans le sens positif, est une fonction entiere de* z.

2° *Montrer qu'on peut, sans changer* $F(z)$, *remplacer* $f(u)$ *par une fonction de meme nature mais n'ayant, a distance finie, aucune singularite a l'exterieur du cercle* C.

3° *Supposant* $f(u)$ *dans ces conditions et supposant connu le developpement*

$$\cdots + A_{-2}u^2 + A_{-1}u + A_0 + A_1 u^{-1} + A_2 u^{-2} + \cdots,$$

qui represente $f(u)$ *dans le domaine du point a l'infini, former la serie des puissances* $P(z)$ *qui represente* $F(z)$ *dans tout le plan* (*On utilisera la transformation* $u = \frac{1}{v}$.)

4° $Q(u)$ *etant un polynome entier donne, de degre* q, *et dont tous les zeros sont a l'interieur du cercle* C, *on* *considère toutes les fonctions*

$$F(z) = \int_C e^{uz} \frac{P(u)}{Q(u)} du,$$

où $P(u)$ *est un polynome entier quelconque. Montrer que, sans restreindre la généralité de ces fonctions, on peut supposer* $P(u)$ *de degré* $q - 1$ *au plus. Montrer que ces fonctions* $F(z)$ *vérifient une même équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre* q.

3° *Par l'application du théorème des résidus, trouver l'expression générale explicite des fonctions* $F(z)$ *qui correspondent au polynome donné* $Q(u)$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$(x^4 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - (5x^3 + x^2 + x + 1)\frac{dy}{dx} + 3x(3x^4 + x^3 + x^2 + x + 2) = 0.$$

Trouver la courbe intégrale passant par l'origine et admettant ce point comme point d'inflexion.

(Juin 1905.)

Bordeaux.

EPREUVE ECRITE. — 1° *Expliquer, avec démonstration, la marche à suivre pour obtenir une intégrale complète de l'équation*

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Appliquer à l'exemple suivant :

$$p = z + xy + q^2.$$

2° a *désignant un nombre réel et positif, déduire de l'intégrale de variable complexe* $\int \frac{e^{iaz^2}\,dz}{1 + z^4}$ *prise le long d'un contour convenablement choisi, la valeur de l'intégrale de variable réelle*

$$\int_0^\infty \frac{\cos a x^2 - \sin a x^2}{1 + x^4} dx.$$

Épreuve pratique. — *Une fonction de variable réelle $f(x)$ est définie dans l'intervalle de 0 à 2π par les conditions suivantes :*

$$
\begin{array}{llll}
\text{Pour} & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots & f(x) = x \\
\text{»} & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \ldots\ldots\ldots\ldots & f(x) = x^2 \\
\text{»} & \pi < x < \dfrac{3\pi}{2} \ldots\ldots\ldots & f(x) = x^3 \\
\text{»} & \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi \ldots\ldots\ldots & f(x) = x^4
\end{array}
$$

Calculer les coefficients du développement de $f(x)$ en série trigonométrique

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{2}a_0 &+ (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots \\
&+ (a_m \cos mx + b_m \sin mx) + \ldots .
\end{aligned}
$$

(Juillet 1905.)

Épreuve écrite. — I. *Une surface* S *est définie par les équations*

$$
\begin{aligned}
x &= a(1 + \cos\theta)\cot\varphi, \\
y &= a(1 + \cos\theta), \\
z &= \frac{a \sin\theta}{\sin\varphi}.
\end{aligned}
$$

Calculer en fonction de θ et φ les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface S. *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.*

II. *On considère l'intégrale de variable complexe*

$$
\int \frac{dz}{(z-2)\sqrt[3]{z^2(1-z)^3}}.
$$

1° *Calculer cette intégrale le long d'un cercle ayant pour centre l'origine et un rayon supérieur à* 2.

2° *Calculer cette intégrale le long d'une couronne circulaire ayant pour centre l'origine et ayant un rayon supérieur à* 2, *l'autre compris entre* 1 *et* 2.

3° *Déduire du résultat la valeur de l'intégrale réelle,*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt[5]{x^2(1-x)^3}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les deux équations différentielles suivantes :*

$$(1) \qquad x^3(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+1)^2\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+1)(2x+5)\frac{dy}{dx} \\ &\qquad + (2x^2+5x-1)y = 0 \end{aligned} \right.$$

ont une solution commune.

Déterminer cette solution et intégrer complètement chacune des équations. (Novembre 1905.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soient* M *un point de l'espace,* P, Q, R *ses projections sur trois plans coordonnés rectangulaires* OYZ, OZX, OXY; OP′ *la droite symétrique de* OP *par rapport à* OY *et à* OZ, OQ′ *la symétrique de* OQ *par rapport à* OZ *et* OX, OR′ *la symétrique de* OR *par rapport à* OX *et* OY. *Montrer que les droites* OP′, OQ′, OR′ *sont dans un plan* Π; *trouver la surface que doit décrire* M *pour que son plan tangent en* M *soit parallèle au plan* Π.

RÉPONSE : $xyz = C^3$.

II. *On donne dans un plan une famille de cercles ayant un même rayon* R *et passant par un point* O; *déterminer leurs trajectoires orthogonales.*

(Soient C le centre d'un cercle, M l'un de ses points; la tangente à la trajectoire qui y passe, dirigée suivant CM, fait avec OM un angle dont le cosinus est $\dfrac{dr}{ds} = \dfrac{x}{4R}$.)

Épreuve pratique. — *Intégrer le système d'équations*

$$\frac{du}{dx} - u + v + w = 2\cos x - \sin x + 3x,$$

$$\frac{dv}{dx} - 2u - 2v - 2w = -2\cos x - 3\sin x - 4x^2,$$

$$\frac{dw}{dx} - u - v + 3w = -\cos x - \sin x - 2x^2 - 3x + 1.$$

[On aura avantage à prendre $u + w$ comme inconnue auxiliaire et l'on trouvera des intégrales de la forme

$$u = (Ax^2 - Bx + C)e^{2x} + \sin x + x^2,$$
$$v = (B - 2A - 2Ax)e^{2x} + \cos x + x^2,$$
$$w = (2A - C + Bx - Ax^2)e^{2x} + x.\ ]$$

(Novembre 1905.)

Grenoble.

Épreuve écrite. — *On donne l'équation*

$$y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + 2x\frac{dy}{dx} = 0:$$

1° *Intégrer cette équation par diverses méthodes et vérifier l'équivalence des résultats;*

2° *Former l'équation différentielle des polaires réciproques des courbes intégrales de l'équation proposée par rapport à la parabole $x^2 = 2y$ et intégrer cette nouvelle équation;*

3° *Vérifier que les courbes ainsi obtenues sont bien les polaires réciproques des premières, par rapport à la parabole considérée.*

Épreuve pratique. — *Calcul de l'aire de la portion de la nappe du cône $z^2 = x^2 - y^2$ située au-dessus du plan xOy qui se projette à l'intérieur de la courbe*

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2xy,$$

dans l'angle xOy formé par les directions positives des axes.

(Novembre 1905.)

Lille.

Épreuve écrite. — 1° *Définir ce qu'on entend par un théorème d'addition algébrique :*

Déterminer et classer les fonctions d'une seule variable, uniformes, qui admettent un théorème d'addition.

2° *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et un cylindre de révolution autour de* Oz, *trouver sur ce cylindre une courbe* (Γ) *dont les tangentes rencontrent un cercle de centre* O, *situé dans le plan* xOy.

3° *Rectifier un arc de la courbe* (Γ).

4° *Calculer l'aire de la portion de surface conique balayée par le rayon vecteur* OM *quand le point* M *décrit un arc de la courbe* (Γ).

5° *Déterminer une surface passant par la courbe* (Γ) *et coupant orthogonalement les sphères tangentes en* O *au plan* xOy. (Novembre 1905.)

Marseille.

Épreuve écrite. — 1° *Vérifier que l'équation différentielle*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 9y^4 - 12y^2 = 0$$

est satisfaite identiquement quand on pose

$$y = 3(t + t^3),$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(1 + t^2)(1 + 3t^2).$$

Établir une relation entre x *et* t *et trouver l'intégrale générale de l'équation proposée.*

2° *Peut-on ou ne peut-on pas développer* $\log z$ *en série de Laurent dans une couronne ayant pour centre l'origine?*

Solution de la première question.

(*Voir* le *Cours d'Analyse*, de Goursat, t. II, p. 324.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale indéfinie*

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

(Novembre 1905.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une surface étant représentée, par rapport à des axes rectangulaires, par l'équation*

$$z = f(xy).$$

1° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques et ramener leur recherche à des quadratures.*

2° *Appliquer les formules générales et effectuer les quadratures pour la surface*

$$\log z = a\sqrt{xy}.$$

3° *Déterminer la fonction f de façon que l'un des systèmes de lignes asymptotiques se projette sur le plan $x\mathrm{O}y$ suivant les courbes*

$$y = cx^n,$$

où c est un paramètre variable, et déterminer le second système de lignes asymptotiques.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cylindre est représenté par l'équation*

$$y^2 = 2px.$$

Calculer la surface de la portion de ce cylindre qui est intérieure à l'ellipsoïde

$$x^2 + a^2y^2 + z^2 = px\left(2a^2 + \frac{c^2}{2}\right).$$

(Novembre 1905.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$[y(y+1)^2 - 1]\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x}{2}(y+1)^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2x = 0.$$

1° *Trouver son intégrale générale.*

2° *Déterminer la surface* S *qui, rapportée à trois axes de coordonnées* Ox, Oy, Oz, *vérifie cette équation aux dérivées partielles et passe par la parabole définie par les équations*

$$y = 1, \qquad x^2 - 2z = 0.$$

3° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface* S, *ainsi que la forme générale des projections de ces lignes sur le plan* Oxy.

II. *Déterminer les différents développements suivant les puissances de* z, *en séries de Maclaurin et de Laurent, dont est susceptible la fonction*

$$\frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2},$$

selon la valeur de z.

Épreuve pratique. — *Calculer le volume du solide commun aux deux paraboloïdes représentés en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{36} - 2z \qquad &= 0, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + 2(z-2) &= 0. \end{aligned}$$

(Novembre 1905.)