J. JUHEL-RÉNOY

Sur la projection orthogonale d'un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 543-544

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__543_0>

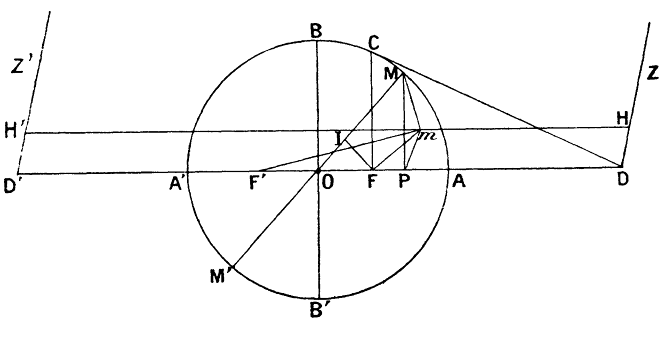
[$\mathrm{L}^1 1\mathrm{e}$]

SUR LA PROJECTION ORTHOGONALE D'UN CERCLE;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

Nous nous proposons d'établir que la démonstration, si simple et si élégante de M. Courcelles, relative à la projection orthogonale d'un cercle et reproduite dans tous les Traités de Géométrie, met en évidence, et avec la même facilité, non seulement les *foyers*, ainsi que l'a montré M. Courcelles, mais encore les *directrices* de l'ellipse et leur propriété caractéristique de polaires des foyers.

Soit O le centre du cercle qui se projette orthogo-



nalement suivant l'ellipse ayant pour foyers F et F′ et pour grand axe AA′. Menons l'ordonnée FC du point F et la tangente en C à la circonférence qui coupe AA′ en D; par le point D, dans le plan de l'ellipse, traçons DZ perpendiculaire à AA′ et, par le point D′ symétrique de E par rapport à O, D′Z′ parallèle à DZ.

Soient

M un point de la circonférence;
m sa projection orthogonale;
mP perpendiculaire sur AA';
H'mH parallèle à AA';
M' symétrique de M par rapport à O;
FI perpendiculaire sur MM'.

On sait que

$$m\mathrm{F} = \mathrm{MI} \qquad \text{et} \qquad m\mathrm{F}' = \mathrm{M'I}.$$

Ceci dit, on a

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 = \overline{\mathrm{OC}}^2 = \mathrm{OF} \times \mathrm{OD},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OM}} = \frac{c}{a}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OP}},$$

donc

$$\frac{c}{a} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OM} - \mathrm{OI}}{\mathrm{OD} - \mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{PD}}$$
$$= \frac{m\mathrm{F}}{m\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{OM} + \mathrm{OI}}{\mathrm{OD} + \mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{M'I}}{\mathrm{PD'}} = \frac{m\mathrm{F}'}{m\mathrm{H}'},$$

et, par suite,

$$\frac{m\mathrm{F}}{m\mathrm{H}} = \frac{m\mathrm{F}'}{m\mathrm{H}'} = \frac{c}{a}.$$

Les droites DZ et D'Z' sont les directrices de l'ellipse.

Il existe donc un rapport constant, plus petit que 1, entre les distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer et à la directrice correspondante.

On voit de plus que, CF étant la polaire du point D, la directrice est la polaire du foyer.