NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. AURIC

Résolution graphique de l'équation $X^2 - pX + q = o$. p et q étant quelconques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 514-518

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__514_1>

[B12a]

RÉSOLUTION GRAPHIQUE DE L'ÉQUATION

$$X^2 - pX + q = 0$$

p ET q ÉTANT QUELCONQUES;

PAR M. A. AURIC.

Nous n'avons trouvé nulle part la solution de cette question, très simple, posée sous sa forme la plus générale, et nous pensons que la solution ci-dessous sera de nature à intéresser peut-être les lecteurs de ce journal.

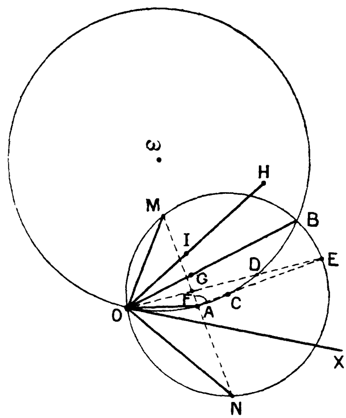
Soit OX la direction des quantités réelles positives

$$\overline{OA} = \frac{p}{2}, \qquad \overline{OB} = \frac{2q}{p},$$

de telle sorte que

$$\overline{OA}.\overline{OB} = q.$$

Il est très facile de déterminer $\overline{OB}$ graphiquement.



Soient le vecteur $\overline{OH} = q$ et OI une longueur égale à l'unité. On fera l'angle

$$\widehat{HOB} = \widehat{AOX}.$$

On portera OA en OG et il suffira de faire passer une circonférence quelconque par H, I, G qui passera également par B.

Soit ω la circonférence passant par O, A, B.

Prenons D milieu de l'arc AB, C milieu de l'arc OB et décrivons de C comme centre une circonférence qui passe par O et B. Prolongeons OD jusqu'en E; je dis tout d'abord que A, C, E sont en ligne droite.

En effet :

$$\widehat{BCE} = 2\widehat{BOE} = 2\widehat{BOD} = \widehat{BOA},$$

$$\widehat{BCA} = 180^\circ - \widehat{BOA}.$$

Menons MN perpendiculaire en A sur ACE. Les deux racines cherchées sont OM et ON.

En effet, A etant le milieu de MN, on a en premier lieu

$$\overline{OM} + \overline{ON} = 2\overline{OA} = p.$$

D'autre part, le quadrilatère AFBE est inscriptible dans un cercle de centre D.

En effet,

$$DB = DA$$

par construction, et comme l'angle $\widehat{A}$ est droit

$$DA = DF.$$

D'ailleurs

$$\widehat{BDO} = \widehat{DBE} + \widehat{BED}$$

et

$$\widehat{BDO} = \widehat{BCO} = 2\widehat{BEO} = 2\widehat{BED},$$

donc

$$\widehat{DBE} = \widehat{BED} \qquad \text{et} \qquad DB = DE.$$

Comme le diamètre OFDE est la bissectrice commune des angles $\widehat{BOA}$, $\widehat{HOX}$, $\widehat{MON}$, la circonference dont nous parlons coupera OB en un point G tel que

$$OG = OA.$$

On aura donc par application du théorème sur la bissectrice

$$OM.ON = OF.OE = OG.OB = OA.OB,$$

et avec les vecteurs

$$\overline{OM}.\overline{ON} = \overline{OA}.\overline{OB} = q.$$

C. Q. F. D.

Il est aisé de se rendre compte que ACE est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{OAB}$ et que, par suite, MAN est la bissectrice intérieure de ce même angle.

La solution se trouve donc ainsi définie :

Prendre sur la circonférence ω passant par O, A, B le point C milieu de l'arc OAB, décrire de ce point une circonférence passant par O et mener la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{OAB}$ dont l'intersection avec la circonférence C donne les racines $\overline{OM}$ et $\overline{ON}$.

La solution est toujours possible, sauf le cas particulier où les points O, A, B sont en ligne droite.

Deux cas sont alors à distinguer :

(a). A se trouve sur le vecteur $\overline{OB}$. Dans ce cas la solution ci-dessus reste applicable.

Les racines $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ ont même module et il est aisé de voir que c'est le seul cas où cette circonstance peut se présenter.

(b). A se trouve à l'extérieur du vecteur $\overline{OB}$. Dans ce cas les racines ont même argument ou des arguments différents de π, selon que $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ ont même argument ou des arguments différents de π.

La solution ci-dessus n'est plus applicable, mais on voit immédiatement que pour avoir les racines il suffit de décrire une circonférence sur OB comme diamètre, de lui mener une tangente AT et de rabattre celle-ci sur la droite OBA suivant

$$AM = AN = AT;$$

les vecteurs $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ sont alors les racines demandées.