NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. JAMET

Sur une propriété de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 411-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__411_0>

[L¹10a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA PARABOLE;

PAR M. V. JAMET.

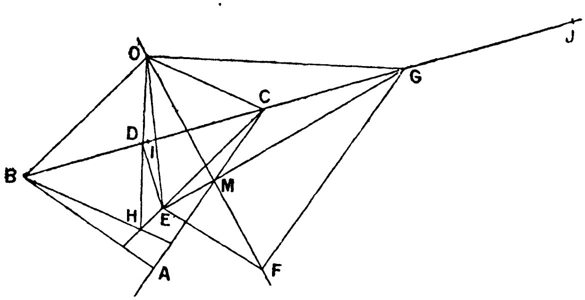
Dans l'Article que j'ai publié au mois de juin (concours de l'École Polytechnique, solution géométrique), je suppose connue, ou tout au moins aisément démontrable, la proposition suivante :

Dans la strophoïde, les cordes dont les extrémités sont sur deux rayons vecteurs issus du point double et également inclinés sur les tangentes en ce point, enveloppent une parabole.

Cette proposition intervient seulement à la fin de l'Article, et le lecteur en aura certainement fait une vérification analytique. La démonstration géométrique en est peut-être moins immédiate, et voici la forme, ou tout au moins une des formes, qu'on peut lui donner.

Rappelons d'abord que toute strophoïde est, par rapport à une parabole, la podaire d'un point situé sur la directrice de cette parabole, et que ce point est le point double de la strophoïde. Soient donc O le point double d'une strophoïde, OH la directrice de la parabole correspondante, F le foyer de cette parabole, BC une droite qui lui est tangente. Sur cette droite se trouvent trois points de la strophoïde; l'un d'eux est la projection du point O sur BC. Nous désignons les deux autres par B et C, et nous aurons démontré notre théorème si nous faisons voir que les deux droites OB, OC sont également inclinées sur les tangentes menées du point O à la parabole.

A cet effet, cherchons à déterminer les deux tangentes à la parabole autres que BC, issues, l'une de B, l'autre de C. Elles forment avec BC un triangle ABC dont l'orthocentre H se trouve sur la directrice de la parabole donnée; et comme OB et OC sont respectivement perpendiculaires à AB et AC, la figure OBHC est un parallélogramme et le point de rencontre D de ses diagonales est au milieu de BC. Donc le centre E du cercle circonscrit au triangle ABC se trouve sur la



droite menée de D perpendiculairement à BC, et l'on observera que cette droite DE est tangente à la parabole. Ce même cercle circonscrit passe par le point F; je dis qu'il passe aussi par le point O. En effet, BC est la tangente au sommet d'une parabole de foyer O et tangente aux deux droites AC, AB, puisque celles-ci sont perpendiculaires à OC et à OB, respectivement. Donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est sur la droite menée du milieu M de la droite OF, perpendiculairement à OF. Cette droite est encore une tangente à la parabole : le point où elle coupe DE est le centre cherché, et la détermination des points BC n'offre plus de difficulté (EC = EB = EF).

Cherchons encore à déterminer les points I, J, où la droite BC est coupée par les tangentes menées du point O à la parabole. A cet effet, observons que ces deux droites OI, OJ sont rectangulaires et que, dans toute conique, la portion d'une tangente comprise entre deux tangentes rectangulaires est vue du foyer sous un angle droit. Donc l'angle IFJ doit être droit, et les quatre points O, I, J, F doivent être sur une circonférence ayant pour diamètre IJ. Son centre G est donc sur la droite EM; de là la détermination immédiate des points I, J.

Je dis encore que ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport à B, C, c'est-à-dire que l'on a

$$GB.GC = \overline{GI}^2,$$

ou bien

$$GB.GC = \overline{GO}^2,$$

ou bien encore que les deux cercles E, G, que nous avons déterminés, se coupent à angle droit, ou enfin que les deux droites EO, OG sont rectangulaires. Mais ces deux droites forment une figure symétrique de l'angle EFG par rapport à la droite EG, et cet angle EFG est droit, parce que EG est encore une portion de tangente à la parabole, comprise entre deux tangentes rectangulaires.

Donc enfin les quatre droites OB, OC, OI, OJ forment un faisceau harmonique dont deux rayons conjugués sont rectangulaires. Ce sont donc les bissectrices des angles formés par les deux autres rayons.

C. Q. F. D.