NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

T. HAYASHI

Un théorème relatif aux valeurs moyennes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 355-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__355_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[**A1b** et **I1**]

UN THÉORÈME RELATIF AUX VALEURS MOYENNES;

PAR M. T. HAYASHI, à Tokio.

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. XXVI, p. 281-284), M. Durand a prouvé un théorème relatif aux valeurs moyennes et M. G. Darboux en a donné une autre démonstration.

Voici une proposition analogue.

Soient a_1, a_2, ..., a_n n nombres positifs tous différents, et soit P_n^r le produit de toutes les sommes de r quelconques de ces n nombres. Il y a

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

telles sommes. Posons

$$\frac{(P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r} = N_r.$$

On a alors

$$N_1 < N_2 < \ldots < N_r < N_{r+1} < \ldots < N_n.$$

Supposons, en effet, que le théorème soit vrai pour n nombres, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{(P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r} < \frac{(P_n^{r+1})^{\frac{1}{C_n^{r+1}}}}{r+1} \qquad (r \leqq n-1),$$

et remplaçons, dans cette inégalité, successivement a_1, a_2, ..., a_n par a_{n+1}. Multiplions les $n+1$ inégalités ainsi obtenues (y compris la précédente) membres à membres, et nous obtenons

$$\frac{(\Pi P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r^{n+1}} < \frac{(\Pi P_n^{r+1})^{\frac{1}{C_n^{r+1}}}}{(r+1)^{n+1}} \qquad (r \leqq n-1).$$

Or, d'une part, ΠP_n^r comprend $(n+1)C_n^r$ facteurs, et, d'autre part, le produit contient symétriquement tous les facteurs de P_{n+1}^r qui sont au nombre de C_{n+1}^r. On a donc

$$\Pi P_n^r = (P_{n+1}^r)^{\frac{(n+1)C_n^r}{C_{n+1}^r}},$$

et, d'une façon analogue,

$$\Pi P_n^{r+1} = (P_{n+1}^{r+1})^{\frac{(n+1)C_n^{r+1}}{C_{n+1}^{r+1}}}.$$

On en conclut que

$$\frac{(P_{n+1}^{r})^{\frac{n+1}{C_{n+1}^{r}}}}{r^{n+1}} < \frac{(P_{n+1}^{r+1})^{\frac{n+1}{C_{n+1}^{r+1}}}}{(r+1)^{n+1}},$$

et, par suite,

$$\frac{(P_{n+1}^{r})^{\frac{1}{C_{n+1}^{r}}}}{r} < \frac{(P_{n+1}^{r+1})^{\frac{1}{C_{n+1}^{r+1}}}}{r+1},$$

lorsque $r \leqq n-1$.

Cette inégalité est, d'ailleurs, évidente lorsque $r = n$.

Le théorème étant vrai pour $n = 2$ est, par suite, général.