Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 310-327

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__310_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique par M. *G. Humbert,* Membre de l'Institut. — Tome II, 1 vol. in-8° de xviii-493 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Le second Volume du *Cours d'Analyse* de M. G. Humbert répond, mieux que nous n'aurions osé le prévoir, aux espérances que nous avait fait concevoir le Tome I. Nous y retrouvons les qualités de simplicité, de clarté et de méthode qui caractérisaient le premier Volume. La lecture de cet Ouvrage, faite à titre de délassement pendant les vacances, a été pour nous un vrai régal.

Le Volume est divisé en trois Parties : Compléments du Calcul intégral, Fonctions analytiques et elliptiques, Équations différentielles.

Le programme de l'enseignement des Mathématiques à

(1) Nous nous sommes bornés aux cas remarquables. Pour $a=0$, on obtiendrait le cas du cylindre de révolution, que j'ai déjà étudié. La forme de l'équation (3) nous montre que la sphère est exclue de nos considérations.

l'École Polytechnique est partagé en deux années : la première où l'on apprend le Calcul différentiel, l'autre réservée au Calcul intégral. Cette division surannée et factice ne doit pas être sans gêner quelque peu les professeurs de l'École obligés de se plier à cette règle qui devait même avoir de graves inconvénients avant qu'on eût sagement accru le programme de la classe de Mathématiques spéciales des notions essentielles sur ces matières.

Le Cours de M. Humbert se ressent de ces entraves dans son ordonnancement. Il avait bien été obligé, malgré les programmes, de parler quelque peu du Calcul intégral dans le premier Volume; mais il n'avait pu le faire que fort discrètement en se contentant de donner des définitions approchées et les règles fondamentales du calcul des quadratures. Il revient donc tout d'abord sur ce sujet pour préciser les notions analytiques d'aire et de volume pour parler des intégrales multiples et des intégrales de lignes et de surfaces. Le Chapitre sur le changement de variables dans une intégrale multiple est particulièrement clair et précis. Évitant toujours, et avec raison, de noyer le lecteur dans de grandes théories abstraites, il expose d'abord le problème, par voie géométrique, sur des exemples d'intégrales doubles, pour ensuite généraliser le procédé par voie purement analytique. Cette manière de faire qui va du simple au compliqué est bien, en matière d'enseignement, généralement la meilleure. De ce que, dans quelques cas particuliers, la théorie générale, à cause de la symétrie des notations, est plus simple que l'étude d'un exemple, certains auteurs ont cru devoir généraliser la méthode qui consiste à embrasser toujours une question dans toute son ampleur, dès le premier abord, pour n'en déduire qu'ensuite, à titre d'exercices, l'examen de cas simples et d'usage courant. C'est une erreur, et il faut savoir discerner. C'est dans ce choix judicieux que se manifeste le talent d'un professeur, et M. Humbert nous prouve qu'il possède ce talent au plus haut degré.

Des applications intéressantes du Calcul des intégrales multiples aux aires, volumes, centres de gravité, moment d'inertie, courbes tautochrones et étude sommaire des fonctions eulériennes complètent heureusement la première Partie.

La théorie générale des fonctions analytiques, telle qu'elle ressort des admirables travaux de Cauchy, Weierstrass, Mittag-Leffler et tant d'autres, ne paraît pas, à première vue, d'une nécessité absolue dans un Ouvrage destiné à de futurs ingénieurs. Mais, comme le fait remarquer l'auteur dans sa Préface, « l'École Polytechnique n'est ni une école de pure théorie, ni une école de pure application ». On doit y donner aux élèves « une instruction étendue et solide », et il serait peut-être téméraire de retrancher de l'enseignement des théories qui tiennent aujourd'hui une si grande place dans la Science, sous prétexte qu'elles ne sont pas immédiatement utilisables par les praticiens. Sait-on d'ailleurs si elles ne serviront pas sous peu? Et du reste l'exemple des fonctions elliptiques, qui *pourraient* être utilisées, et qu'on ne peut étudier sans avoir quelque peu approfondi la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, vient à point corroborer cette assertion. Non seulement nous approuvons M. Humbert, mais nous irons même plus loin que lui dans cette voie; et si nous osions formuler un desideratum à propos de son excellent Ouvrage, nous émettrions le regret de ne pas y voir quelques indications plus développées sur la théorie des *Groupes de transformations*. Cette théorie est actuellement d'une telle importance, elle s'infiltre à tel point dans toutes les parties des Mathématiques, qu'on ne s'explique pas pourquoi, en France du moins, on l'écarte systématiquement de tout enseignement.

Pour l'étude des fonctions analytiques l'auteur adopte le point de vue de Cauchy. C'est le procédé le plus bref, le plus clair et aussi le plus complet si l'on y ajoute, comme c'est le cas ici, des indications sur les théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler.

M. Humbert s'est à peu près borné à l'étude des intégrales de fonctions uniformes, se contentant de notions rapides, mais suffisantes, sur le cas où la fonction possède des points de branchement du type de celui de $\sqrt{z-a}$, pour $z=a$, et, par suite, il n'a pas cru devoir se servir des feuillets de Riemann. C'est évidemment raisonnable. Il a ainsi préparé le terrain pour une étude sommaire des fonctions elliptiques.

Jusqu'ici on nous a trop souvent habitué ou bien à réduire la place accordée aux fonctions elliptiques, dans un traité classique, à si peu de chose que le lecteur n'avait aucune idée nette sur la question, ou bien à nous présenter quelque volumineuse monographie propre à rebuter les plus vaillants par ses dimensions. M. Humbert a réussi à condenser fort habilement en quatre-vingts pages tout ce qui est essentiel sur le sujet. Pour exposer la théorie des fonctions elliptiques on suit d'ordinaire deux voies : l'une, la grande voie royale, qui consiste à construire d'abord les fonctions σ, à en faire une étude magistrale pour passer de là à la fonction ζ puis à la fonction $\wp u$; l'autre, en quelque sorte historique, qui définit de suite $\wp u$ par l'inversion d'une intégrale de première espèce, mais qui se heurte rapidement à des difficultés telles qu'on abandonne le plus souvent la partie, pour laisser l'étudiant dans l'ignorance. L'auteur en a choisi une troisième fort élégante et d'une remarquable rapidité.

Il définit d'abord ζu par une série de Mittag-Leffler, après avoir succinctement établi les propriétés générales des fonctions doublement périodiques uniformes. Cette série met de suite en évidence les propriétés essentielles de la fonction ζ, qui, d'ailleurs, est rationnellement *construite* comme fonction méromorphe admettant comme pôles les points périodes

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

La fonction $\wp u$ est alors définie par l'égalité

$$\wp u = -\zeta' u$$

et σu par

$$\sigma u = u e^{\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du}$$

qui entraîne

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u.$$

Ainsi, en quarante pages, nous apprenons à connaître les principales fonctions elliptiques, leurs propriétés essentielles, leurs relations fondamentales, jusques y compris les formules d'addition. Le reste n'est qu'applications et *calculs numériques*, car judicieusement l'auteur a tenu à montrer comment pratiquement on pourra se servir de ces fonctions.

La dernière partie du Volume traite des équations différentielles et aux dérivées partielles. Nous y trouvons d'abord les procédés d'intégration des équations différentielles classiques du premier ordre. Ce Chapitre est actuellement presque en entier dans le programme de la classe de Mathématiques spéciales, aussi les professeurs de l'enseignement secondaire pourront-ils y puiser à loisir.

Viennent ensuite les cas de réduction les plus courants d'équations d'ordre quelconque et des indications sommaires sur les systèmes d'équations différentielles.

L'auteur a réservé deux longs Chapitres aux équations linéaires, et même il a cru devoir en consacrer un tout entier à l'étude de la forme analytique de leurs intégrales. Était-ce bien nécessaire ou simplement *utile?* N'y a-t-il pas eu là quelque entraînement, quelque suggestion inspirée par les récents et superbes travaux sur les équations différentielles à points critiques fixes? En revanche, nous nous étonnons un peu de ne pas trouver, dans une étude aussi détaillée, les indications nécessaires pour l'intégration des équations dont les coefficients sont linéaires en x. On sait, en général, les intégrer, il eût peut-être été bon de le faire savoir à de futurs praticiens.

Le Volume se termine par l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et de quelques types simples classiques d'ordre supérieur au premier.

Nous pensons en avoir assez dit pour avoir pu montrer tout l'intérêt de ce beau *Cours d'Analyse*. Il eût été bien regrettable que M. Humbert ne l'ait pas publié, car il rendra certainement de grands services à d'autres qu'aux jeunes Polytechniciens. C'est, par excellence, l'Ouvrage qui convient aux candidats au certificat de Calcul différentiel et intégral de nos Facultés des Sciences. Ils le liront sans peine et y trouveront, sous une forme toujours simple et claire, quoique fort rigoureuse et précise, les notions dont on est en droit d'exiger d'eux la connaissance.

CARLO BOURLET.

LEÇONS SUR L'INTÉGRATION ET LA RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES, professées au Collège de France par M. *Henri Lebesgue,* Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes. — 1 vol. in-8° de VII-138 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Jadis nos pères, j'entends par là les mathématiciens de talent qui ont construit notre Science, attendaient que les difficultés se présentassent pour les résoudre.

Aujourd'hui il est une jeune génération qui court au-devant des écueils, dédaigne les grandes routes claires, celles qui parfois sont les voies triomphales, et se complaît à côtoyer les précipices, au risque d'avoir le vertige, en des chemins étroits et broussailleux où l'on a grand'peine à ne pas se perdre.

Autrefois on se garait des fonctions discontinues, comme un artiste se gare des difformités; aujourd'hui on les recherche, on construit à plaisir, et non sans peine, des monstres; et, pour peu que vous les y poussiez, nos jeunes chercheurs vous prouveront irréfutablement que la fonction continue, au moins dans leurs conceptions sinon dans la nature, n'est qu'un accident négligeable.

Et cependant, quelque doute que l'on puisse émettre sur la nécessité ou l'utilité de tels travaux, on est forcé d'admirer l'ingéniosité, la profondeur de vues, l'impeccable logique de ceux qui s'y livrent et y réussissent comme M. Henri Lebesgue. Ils rendent service à la Philosophie de notre Science, nous apprennent à nous défier de nous-mêmes, et nous incitent, en nous montrant la voie, à peser scrupuleusement nos mots et nos idées.

Les définitions mathématiques, nous dit M. Lebesgue (p. 99), appartiennent à deux classes. Les unes sont *descriptives*, c'est-à-dire qu'on y énonce des propriétés caractéristiques de l'être qu'on veut définir; les autres sont *constructives*, car on y énonce quelles opérations il faut faire pour obtenir l'être que l'on veut définir.

La définition de la fonction primitive est descriptive puisque cette fonction est définie par la propriété d'avoir une fonction donnée $f(x)$ pour dérivée; au contraire la définition de l'intégrale indéfinie, d'après Riemann, par la limite de la somme

$$k + \sum_{a}^{x} f(x_i)\,\delta_i$$

quand le maximum des intervalles partiels δ_i tend vers zéro, est évidemment *constructive*.

Ces deux définitions, de nature différente, et plus généralement toutes celles qu'on a pu donner de la fonction primitive ou de l'intégrale indéfinie sont-elles d'accord? Telle est la question que se pose M. Lebesgue, qu'il s'est posée dans sa thèse, qu'il a résolue et dont il a enseigné les résultats en un cours de vingt leçons pendant l'hiver 1902-1903 au Collège de France.

Lorsqu'il s'agit de fonctions continues tout marche à souhait; c'est lorsqu'il y a des discontinuités que la chose se complique.

Si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$ (supposée continue) l'intégrale définie est

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Et déjà, pour que cette définition simple ait un sens, faut-il établir l'existence de la primitive $F(x)$. Ceci se fait au moyen d'une aire et cela conduit Cauchy à préciser la notion d'*aire* comme limite d'une somme de rectangles infiniment petits. L'intégrale étant définie lorsque $f(x)$ est continue, si $x = a$ est une discontinuité de $f(x)$, Cauchy considère

$$S = \int_\alpha^{a-h} f(x)\,dx + \int_{a+k}^{\beta} f(x)\,dx$$

et fait tendre h et k vers zéro, simultanément et indépendamment. Si S a une limite, ce sera l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Dirichlet étend le procédé de Cauchy au cas où les discontinuités de $f(x)$ forment un ensemble e dont le dérivé e' ne contient qu'un nombre fini de points.

M. Lebesgue recherche quels sont *tous* les cas où le procédé de Cauchy est applicable et arrive à la conclusion qu'il faut et il suffit que l'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$ soit *réductible,* en supposant l'existence de $F(x)$ vérifiant l'égalité (1) pour les intervalles de continuité.

Riemann, pour dégager la définition de l'intégrale de toute interprétation géométrique, prend comme définition précisément celle que Cauchy emploie pour l'aire. D'après lui on a alors,

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum \delta_i f(x_i),$$

et Paul du Bois-Reymond montre que, pour que le second membre ait une limite pour une fonction *bornée,* il faut et il suffit que les points de discontinuité de $f(x)$ forment un *groupe intégrable,* c'est-à-dire un ensemble de points pouvant être enfermés dans un nombre *fini* de segments dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut, ensemble de *mesure nulle.*

C'est là une condition plus large que la précédente.

Cette définition purement analytique de l'intégrale définie peut d'ailleurs, d'après M. Jordan, être présentée sous une forme géométrique. Il faut alors reprendre une à une les notions de courbe et d'aire.

Une *courbe* est définie par les égalités

$$x = f(t),$$
$$y = g(t),$$

où l'on fait varier t de t_0 à t_1.

Elle est *fermée* si, pour t_0 et t_1, x et y reprennent les mêmes valeurs. Pour un esprit simpliste la notion d'aire limitée par une telle courbe est intuitive; mais, hélas! les choses ne sont pas toujours aussi simples que l'aire d'un cercle ou d'une ellipse, lorsqu'on s'égare dans la forêt des fonctions biscornues. On a découvert des *courbes* qui couvrent *toute une région du plan;* telle est la courbe de Péano qui, lorsque t varie, passe par *tous* les points de la surface d'un carré! Qu'est-ce alors que l'aire *limitée* par une telle courbe?

M. Jordan, ayant défini l'*intérieur* de la courbe, partage le plan en petits carrés; il considère d'une part la somme de tous ceux dont *tous* les points sont intérieurs à la courbe et d'autre part la somme de ceux dont *quelques* points au moins sont intérieurs à la courbe. Ces deux sommes ont des limites, lorsque les petits carrés tendent vers zéro, qui sont ce qu'il appelle les *étendues intérieure* et *extérieure* de la courbe.

La courbe a alors une *aire* si ces deux étendues sont égales; et, tout bien pesé, on retrouve exactement l'intégrale de Riemann.

La recherche de la fonction primitive suivant la définition descriptive *paraît* maintenant également résolue. Si l'on considère en effet l'intégrale *indéfinie* de la fonction bornée intégrable $f(x)$:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx + k,$$

où k est arbitraire. On a une *fonction continue qui admet* $f(x)$ *pour dérivée en tous les points où* $f(x)$ *est continue.*

Mais que se passe-t-il aux discontinuités de $f(x)$? La difficulté est toujours la même et, si l'on voulait trouver une fonction primitive de $f(x)$ qui aurait pour dérivée $f(x)$ pour *toutes* les valeurs de x, le problème n'aurait généralement *aucune* solution. En effet, pour une valeur x_0 de discontinuité, les trois nombres (supposés exister) $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ et $f(x_0)$ ne sont pas tous trois égaux. Or, $\dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$, d'après le théorème de la moyenne, aura pour limite $f(x_0 - 0)$ ou $f(x_0 + 0)$ suivant que h tend vers zéro par valeurs négatives ou positives, et sa limite ne sera pas $f(x_0)$, comme on le désirerait.

Lorsqu'un problème n'a pas, en général, de solution, le mathématicien d'ordinaire le transforme de façon qu'il en ait une.

Ce qui précède montre que $F(x)$ a, pour $x = x_0$, en quelque sorte *deux* dérivées, l'une à gauche, l'autre à droite, respectivement égales aux *deux* valeurs, à gauche et à droite, de $f(x)$.

Plus généralement, si l'on considère un point de discontinuité x_0 d'une fonction bornée $f(x)$, soient M et m les limites supérieure et inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle $x_0 - \varepsilon$, x_0. Lorsque ε tend vers zéro M et m ont respectivement des limites M_g et m_g qui sont les *limites supérieure et inférieure à gauche de* $f(x)$ *pour* $x = x_0$. On définit de même les *limites supérieure et inférieure à droite* M_d et m_d.

Soit alors $F(x)$ une fonction à variation bornée. Le rapport

$$\varphi(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

est une fonction bornée et ses quatre limites pour $h = 0$ sont les quatre *nombres dérivés* λ_g, Λ_g, λ_d, Λ_d, inférieur et supérieur, à gauche et à droite, de $F(x)$ pour $x = x_0$.

Le problème de la recherche de la fonction primitive peut alors se généraliser en considérant la fonction comme déterminée par *un* de ses nombres dérivés.

Et tout compte fait on parvient à la conclusion que : *pour qu'une fonction intégrable* (sens de Riemann) *soit une fonction dérivée* (c'est-à-dire soit en *tous* ses points la dérivée d'une autre) *il faut et il suffit qu'elle ait en tout point une valeur moyenne déterminée et qu'elle soit partout égale à sa valeur moyenne.*

La valeur moyenne pour $x = x_0$ est la limite de l'intégrale

$$\frac{1}{k+h}\int_{x_0-h}^{x_0+k} f(x)\,dx,$$

quand k et h tendent vers zéro.

Il reste cependant à voir si l'on peut étudier les fonctions dérivées sans passer par l'intégrale de Riemann.

Or, M. Lebesgue nous montre d'abord qu'on peut démontrer directement que toute fonction continue est une fonction dérivée; puis, une série uniformément convergente de fonctions dérivées est encore une fonction dérivée.

Il n'en résulte cependant pas que pratiquement on ait ainsi construit toutes les fonctions dérivées.

Le fait fondamental, dû à M. Voltera, est qu'*il existe des fonctions dérivées non intégrables au sens de Riemann.*

Il en résulte que l'intégrale définie, comme l'ont fait Cauchy, Duhamel et Serret, en partant de la fonction primitive, peut exister sans que l'intégrale de Riemann existe et inversement. Il y a désaccord.

Pour arriver à le faire disparaître, M. Lebesgue substitue à la définition constructive de l'intégrale définie de Riemann la définition descriptive suivante :

*Nous nous proposons d'attacher à toute fonction bornée $f(x)$, définie dans un intervalle fini (a, b), un nombre fini $\int_a^b f(x)\,dx$, que nous appelons l'*INTÉGRALE *de $f(x)$ dans (a, b) et qui satisfait aux conditions suivantes :*

1° *Quels que soient a, b, h, on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx.$$

2° *Quels que soient a, b, c, on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

3°

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

4° *Si l'on a* $f \geqq 0$ *et* $b > a$, *on a aussi*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0.$$

5° *On a*

$$\int_0^c 1 \times dx = 1.$$

6° *Si* $f_n(x)$ *tend en croissant vers* $f(x)$, *l'intégrale de* $f_n(x)$ *tend vers celle de* $f(x)$.

Il est clair que toute fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens nouveau et l'auteur démontre que l'intégrale de Riemann est la *seule* solution du problème ainsi posé. Mais il y a plus, et nous apprenons que les fonctions de Riemann ne sont pas les seules qui admettent une intégrale au nouveau sens. Ce sont ces fonctions que M. Lebesgue appelle *sommables*.

Toute fonction dérivée bornée est sommable et ses intégrales indéfinies sont les fonctions primitives.

Ainsi disparaît en partie le désaccord. Il ne disparaît pas complètement, car il reste toujours des fonctions sommables bornées qui ne sont pas des dérivées et il y a des fonctions *non bornées* qui ne sont pas sommables et pour lesquelles cependant le procédé de Cauchy-Dirichlet fournit une intégrale au sens de Cauchy.

Cette rapide analyse de l'intéressant Ouvrage de M. Lebesgue suffira, je l'espère, pour donner une idée des problèmes subtils que l'auteur a étudiés, de ceux qu'il s'est posés et des résultats qu'il a obtenus.

Il s'est volontairement limité aux fonctions réelles de variables réelles et, le plus souvent, les a supposées *bornées*.

Il est probable que la question, déjà fort difficile dans ce domaine restreint, serait d'un abord encore plus ardu dans le cas de variables complexes où forcément interviendrait le chemin d'intégration.

Je doute que, dans ce cas, les six conditions posées en définition par M. Lebesgue, même modifiées, suffisent pour caractériser l'intégration. Ainsi, des conditions (3) et (6) on déduit sans peine l'égalité absolument nécessaire

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$$

où k est une constante *réelle*. Je ne vois pas que ces conditions puissent suffire à l'établir dans le cas de k imaginaire. Jadis, dans des recherches sur des transformations additives vérifiant les conditions (3) et (6), je me suis heurté à cette difficulté et n'ai pu la vaincre qu'en astreignant la fonction transformée à être régulière.

Il est vrai qu'ici on pourra tourner la difficulté en ramenant le cas de la variable imaginaire à celui de la variable réelle, *par une définition*.

Quoi qu'il en soit l'Ouvrage de M. Lebesgue est de ceux que les professeurs doivent lire et méditer. Il leur fera faire ce *travail de derrière la tête* que jadis M. Vacquant me conseillait de faire pour moi-même, dans l'intérêt de mon enseignement, mais qu'il me conseillait aussi de conserver par devers moi, pour ne présenter aux élèves que des idées simples et facilement assimilables.

Je doute, d'ailleurs, que M. Lebesgue ait écrit son Livre pour des élèves de Mathématiques spéciales, ou même pour les candidats à la Licence.

CARLO BOURLET.

COURS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE à l'usage des candidats à l'École centrale des Arts et Manufactures; par MM. *A. Tresse* et *A. Thybaut*. — 1 vol. in-8° de III-549 pages. Paris, Armand Colin, 1904.

L'École centrale des Arts et Manufactures a été la première à modifier son programme d'admission dans le sens large et pratique dans lequel est conçu le nouveau programme de la classe de Mathématiques spéciales élaboré, il y a un an, par une Commission interministérielle. L'Ouvrage de MM. Tresse et Thybaut correspond admirablement à cet esprit nouveau.

Graduer les difficultés, élaguer les discussions purement formelles, multiplier les exemples numériques, éviter la multiplicité des méthodes pour un même sujet. telles sont les qualités fondamentales de ce Livre.

Les deux géométries (à deux et trois dimensions) sont rédigées sur le même plan. Il nous suffira donc d'examiner rapidement la premièie.

Dans les *préliminaires* nous signalerons tout spécialement le principe d'homogénéité et la construction d'expressions algébriques régularisée et codifiée par une règle générale dite *de réduction.* Il est à remarquer, et l'on pourra s'en rendre compte sur maints exemples, que l'application de cette règle conduit le plus souvent aux constructions graphiques les plus simples et que beaucoup de constructions soi-disant *simplifiées* ne le sont qu'au point de vue du langage et pas du tout au point de vue graphique, qu'on ne doit jamais perdre de vue, en pareil cas.

Après l'étude de la droite et du cercle, vient immédiatement celle des courbes planes faite par ordre de difficulté croissante. On étudie d'abord les courbes dont les équations sont résolues en x et y, puis celles où x et y sont exprimées en fonction d'un paramètre t, pour n'aborder qu'en dernier lieu, et avec *tempérament*, les courbes données par une équation de la forme

$$f(x, y) = 0.$$

La théorie des asymptotes est, en particulier, présentée d'une façon fort simple, claire et rapide.

Le Livre IV est réservé à l'étude des coniques sur leurs équations réduites, précédant ainsi le Livre V réservé à l'étude des courbes du second ordre sur leur équation générale. Cet arrangement est très rationnel et progressif, car il va du simple au compliqué et facilite aux élèves la compréhension des théorèmes généraux, puisqu'ils connaissent les objets particuliers auquels ils s'appliquent.

C'est surtout dans l'étude des quadriques que cet arrangement est favorable.

Tous ceux qui, en effet, ont jadis enseigné ces matières suivant l'ancienne coutume, savent avec quelle peine les élèves de première année s'assimilaient les théories générales sur les centres, diamètres, axes, etc., qui s'appliquaient en somme à des surfaces qu'ils ne *connaissaient pas,* dont ils ignoraient la forme géométrique et les propriétés essentielles.

Sagement les auteurs ont glissé sur les longues discussions, sans portée, sur des équations générales; et dans les surfaces du second ordre ils se sont contentés d'*indiquer la possibilité* de la réduction des équations en axes rectangulaires sans même rechercher comment on trouverait les changements de coordonnées qui l'effectueraient. C'est bien suffisant.

Les auteurs ont même, par un artifice fort élégant, évité d'avoir à démontrer que l'équation en S a toutes ses racines réelles, car il leur suffit qu'il y en ait une, non nulle. Il est d'ailleurs à remarquer que, de leur méthode même, *résulte* cette réalité.

L'Ouvrage, excellent à tous points de vue, n'est malheureusement pas assez complet pour les candidats aux Écoles Polytechnique et Normale.

Il serait facile, dans un appendice ou par quelques Notes, de le compléter, et nous le désirons vivement, car nos élèves n'ont actuellement aucun Livre rédigé dans l'esprit de leur programme; et celui-ci s'y conforme d'une façon parfaite.

C. B.

MATEMATIKA TERMINARO KAJ KRESTOMATIO; par M. *Raoul Bricard*. — 1 vol. petit in-8° de 59 pages. Paris, Hachette et C^{ie}, 1905. Prix : $0^{fr},75$.

Les progrès incessants de la langue auxiliaire Esperanto sont si rapides, que le jour où les savants l'adopteront exclusivement pour la publication des grands travaux d'un intérêt universel est très proche. D'ailleurs l'existence et le succès de l'*Internacia Scienca Revuo,* revue mensuelle scientifique, rédigée tout entière en Esperanto et traitant des sujets les plus divers, prouve, par le fait, l'indiscutable appropriation de cet idiome si facile aux besoins de la Science. A vrai dire, la terminologie scientifique en Esperanto n'est pas encore fixée; mais cette terminologie est, comme on sait, déjà par ellemême si internationale que les auteurs de la *Scienca Revuo* ont pu, sans craindre d'être incompris, employer des milliers de termes techniques puisés dans ce fonds commun et qu'ils proposent ainsi en attendant qu'une autorité compétente les sanctionne définitivement.

Malgré tout, pour éviter les légères divergences, il y a intérêt à ce que cette terminologie devienne rapidement stable, et c'est dans ce but que M. R. Bricard a rédigé son petit Ouvrage qui contient tous les termes principaux en usage dans les Mathématiques.

Il n'*impose* pas au lecteur les termes qu'il emploie, il se contente de les *proposer;* mais leur choix est si judicieux que, sans nul doute, sa terminologie, à quelques détails près, sera définitivement adoptée. En tous cas, il est certain que, dès maintenant, les mathématiciens espérantistes l'emploieront à l'exclusion de toute autre, et ainsi, bon gré mal gré, elle fera loi.

Tous ceux qui ont quelque peu étudié la question d'une langue artificielle et ont pratiqué l'Esperanto savent combien il est dangereux et téméraire de vouloir créer un dictionnaire technique de toutes pièces, mot par mot, en dehors de tout essai pratique, de tout emploi effectif dans un texte suivi.

Les mots ainsi choisis risquent fort de ne pas cadrer avec *l'esprit* de la langue, de se contrecarrer les uns les autres et surtout, ce qui serait très grave pour une langue aussi souple que l'Esperanto, de ne pas se prêter aux nombreuses et utiles dérivations qu'autorise la langue.

C'est pour éviter cet écueil qu'au lieu de poursuivre, comme M. Hoffbauer l'avait tenté, d'ailleurs avec succès, dans les suppléments de ce journal, la publication d'un dictionnaire, M. R. Bricard a élaboré une sorte de Chrestomathie mathématique composée de définitions, d'exemples et d'énoncés. rédigée tout entière en Esperanto et où le contexte explique les termes nouveaux. Ainsi l'on voit les mots en place, on juge de leur degré d'appropriation à la langue, de leur souplesse et de la commodité de leur emploi.

Bien plus, notre langage mathématique se compose non seulement de termes, mais encore d'expressions coutumières, de tournures consacrées qui ainsi sont rendues dans cet Ouvrage qui se termine par quelques textes suivis bien choisis.

Le travail était moins facile qu'on ne pourrait le croire au premier abord.

Il fallait, en premier lieu, extraire de la langue vulgaire tous les termes utilisables, en fixer le sens au point de vue scientifique, et en choisir la forme pour une utilisation facile.

Il fallait ensuite, non pas *créer,* mais *choisir* dans la terminologie des langues européennes, suivant l'internationalité acquise, les termes nouveaux indispensables soit pour désigner des objets qui ne figurent pas dans les dictionnaires courants, soit pour éviter les doubles sens, inacceptables dans une langue scientifique et logique.

Il fallait même aller plus loin : toutes nos terminologies scientifiques se sont créées peu à peu, un peu au hasard, d'une façon souvent irrationnelle. Or, ayant à donner une terminologie nouvelle dans une langue logique, on devait nécessairement essayer d'y introduire plus de régularité et de raison qu'il n'y en a dans les nôtres.

Dans cet ordre d'idées le mieux eût donc été de faire presque table rase de ce qui existe et de créer, de toutes pièces, une belle terminologie logique et philosophique, conforme à la Science qu'elle énonce.

Mais le mieux est souvent l'ennemi du bien, et, à bouleverser ainsi toutes nos habitudes, on perdrait en internationalité, en compréhension immédiate, ce que l'on gagnerait en régularité et en logique.

Voici, par exemple, le mot *déterminant* qui est absolument international et qui cependant n'a rien de raisonnable, puisqu'un déterminant ne détermine rien. Le remplacera-t-on par un terme nouveau dont on imposera la connaissance aux mathématiciens, lorsque tous comprendront, sans plus d'explications, le mot esperanto *determinanto?* Le principe de l'internationalité et de la compréhension immédiate oblige à conserver le mot *determinanto,* malgré qu'il ait l'air d'un dérivé-participe du verbe *determini.*

Ainsi l'auteur, sans cesse ballotté entre deux principes, a dû bien souvent faire des sacrifices à nos habitudes acquises. Il a, le plus souvent, presque toujours, donné le pas au terme international, et il a eu raison.

Cependant, grâce à d'ingénieux artifices, il a pu fréquemment, tout en sauvegardant la compréhension immédiate, introduire plus de régularité dans la terminologie.

L'Esperanto, comme l'Allemand, forme des mots composés dont la signification n'est pas douteuse dès qu'on connaît les mots composants. Grâce à cette faculté précieuse il a été souvent possible d'obtenir des formes régulières, sans charger notre mémoire, là où nos langues vivantes sont absolument chaotiques.

Pour nommer les polygones nous disons en français : triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone, etc. L'irrégularité et l'illogisme de cette terminologie barbare saute aux yeux, à tel point que nos géomètres modernes ont, avec raison, dédoublé la série en : triangle, quadrangle, pentagone, etc., d'une part, et trilatère, quadrilatère, pentalatère, etc., d'autre part. C'est logique mais ce n'est pas encore régulier.

En Esperanto *angulo* signifie *angle* et M. Bricard choisit pour *côté* le mot nouveau *latero,* laissant au mot *flanko* de la langue vulgaire son sens général de *côté, flanc.* Alors, avec les mots *tri* (3), *kvar* (4), *kvin* (5), *ses* (6) de la numération, il obtient les deux séries *régulières : triangulo, kvarangulo, kvinangulo,* etc., et *trilatero, kvarlatero, kvinlatero,* etc. immédiatement compréhensibles et qui ont l'avantage de pouvoir se prolonger indéfiniment; et ainsi tout polygone d'un nombre de côtés donné aura son nom régulier en Esperanto.

Au besoin, et provisoirement, on pourra admettre des doublets. Ainsi, ayant choisi le mot *edro* pour désigner une *face,* il obtient la série normale *duedro, triedro, kvaredro, okedro, dekduedro* immédiatement compréhensible dès qu'on connaît les noms de nombres; mais il admet les *doublets* internationaux *diedro, tetraedro, oktaedro, dodekaedro* également compris à cause de leur internationalité. Certainement l'usage et la logique feront disparaître les seconds devant les premiers, de la même façon que les noms réguliers de la Chimie moderne ont étouffé les anciennes expressions de vitriol, acide muriatique, etc.

Ces exemples suffiront, je pense, à faire voir dans quel esprit à la fois *pratique* et *scientifique* M. Bricard a conçu sa terminologie. Et si j'ajoute qu'espérantiste habile, il connaît toutes les ressources et les nuances de cette langue si riche, si souple et si précise, j'espère ainsi avoir suffisamment piqué la curiosité de mes lecteurs pour inciter non seulement ceux qui connaissent déjà l'Esperanto, mais surtout ceux qui ne le connaissent pas, à lire cette excellente petite brochure. Je ne connais pas de mathématicien qui, ayant pris la peine de parcourir une grammaire Esperanto, n'ait pas été immédiatement séduit par cette langue si appropriée à la précision et à la clarté qui conviennent à sa Science. C. B.