Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 228-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__228_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1805.

(1898, p. 388.)

Étant donnée l'équation

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) = a x^n &- n b x^{n-1} \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2} c x^{n-2} - \ldots - n h x + l = 0, \end{aligned}\right.$$

dont le degré $n = 2\nu$ *est pair, si l'on désigne par* φ_1, φ_2, φ_3, ... *les dérivées successives de* $\varphi(x)$, *divisées respectivement par* n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, ..., *l'équation en* z

$$f(z) = \left|\begin{array}{cccccc} \varphi_\nu + z & \varphi_{\nu-1} & \varphi_{\nu-2} & . & \ldots & \varphi \\ \varphi_{\nu+1} & \varphi_\nu - \frac{z}{\nu} & \varphi_{\nu-1} & . & \ldots & \varphi_1 \\ \varphi_{\nu+2} & \varphi_{\nu+1} & \varphi_\nu + \frac{1.2}{\nu(\nu-1)} z & . & \ldots & \varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & . & \ldots & \ldots \\ \varphi_{n-1} & \varphi_{n-2} & \ldots\ldots\ldots & \varphi_\nu \mp \frac{z}{\nu} & \ldots & \varphi_{\nu-1} \\ a & \varphi_{n-1} & \ldots\ldots\ldots & \varphi_{\nu+1} & \ldots & \varphi_\nu \pm z \end{array}\right| = 0$$

est indépendante de x.

Trouver les relations qui lient les racines de l'équation en x à celles de l'équation en z.

(P. Sondat.)

SOLUTION

Par l'Auteur.

En posant

$$\psi(x) = bx^{n-1} - (n-1)cx^{n-1} + \ldots + (n-1)kx - l,$$

on aura la relation

$$\psi(x) = x\varphi_1 - \varphi$$

qui, appliquée aux dérivées successives, conduit aux égalités

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} b &= ax - \varphi_{n-1},\\ c &= ax^2 - 2x\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ bx - c &= x\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2},\\ cx - d &= x^2\varphi_{n-1} - 2x\varphi_{n-2} + \varphi_{n-3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si R est une fonction homogène *quelconque* des coefficients de (A), nous désignerons par R′ cette même fonction où nous remplacerons $a, b, c, \ldots, k, l$ par $a, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi$.

Dans le déterminant $f(z)$, remplaçons chaque horizontale de rang $p+1$ *en remontant*, par celle obtenue en ajoutant termes à termes les horizontales inférieures respectivement multipliées par les termes de $(x-1)^p$ développé, c'est-à-dire la première H_1 par H_1, la deuxième H_2 par $xH_1 - H_2$, la troisième H_3 par $x^2H_1 - 2xH_2 + H_3$, et ainsi de suite.

Dans le nouveau déterminant, égal à $\pm f(z)$, opérons de même sur les verticales, en allant *de la gauche vers la droite*, ou remplaçons la première V_1 par V_1, la deuxième V_2 par $xV_1 - V_2$, ..., et nous aurons un nouveau déterminant égal à $+f(z)$, car, si la première substitution a changé le signe de $f(z)$, la seconde le rétablit, en le changeant de nouveau.

Pour avoir le terme connu, soit R′ de $f(z)$, on fera $z = 0$, ce qui donne, d'après les égalités (1), après les deux substitutions successives,

$$
R' = \begin{vmatrix}
g & . & . & \dots & k & l \\
. & . & . & \dots & . & k \\
c & . & . & \dots & . & . \\
b & . & . & \dots & . & . \\
a & b & c & \dots & . & g
\end{vmatrix} = R.
$$

Rétablissons les termes en z en faisant abstraction des autres et considérons l'élément $A_{p+1,\,q+1}$ appartenant à la $(p+1)^{\text{ième}}$ horizontale et à la $(q+1)^{\text{ième}}$ verticale. En remplaçant H_{p+1} par

$$x^p H_1 - p x^{p-1} H_2 + \dots \mp p x H_p \pm H_{p+1},$$

on amène dans A, si $p+q > \nu$, un terme en z, recueilli dans la diagonale principale, sur l'horizontale $H_{p'+1}$, si $p'+q=\nu$. Ce terme recueilli, soit B, a pour valeur

$$B = \frac{\pm 1.2\dots p'}{\nu(\nu-1)\dots(\nu-p'+1)} z$$

ou

$$B = \frac{\pm 1.2\dots(\nu-q)}{\nu(\nu-1)\dots(q+1)}.$$

et, amené dans A, il devient

$$C = \frac{\pm p(p-1)\dots(p-\nu+q+1)}{1.2\dots(\nu-q)} x^{p+q-\nu} \times B$$

ou

$$(2) \qquad C = \frac{\pm p(p-1)\dots(p-\nu+q+1)}{\nu(\nu-1)\dots(q+1)} z x^{p+q-\nu}.$$

En faisant $p=\nu,\ \nu-1,\ \nu-2,\ \dots$ et donnant à q les valeurs $0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ \nu$, que q peut prendre, on aura dans $H_{\nu+1}$:

$$(-1)^\nu [z,\ zx,\ zx^2,\ \dots,\ zx^\nu];$$

dans H_ν :

$$(-1)^\nu \frac{1}{\nu} [0,\ z,\ 2zx,\ \dots,\ \nu z x^{\nu-1}];$$

dans $H_{\nu-1}$:

$$(-1)^\nu \frac{1.2}{\nu(\nu-1)} \left[0,\ 0,\ z,\ \dots,\ \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} z x^{\nu-2}\right];$$

et ainsi de suite.

Si maintenant nous remplaçons V_{q+1} par

$$x^q V_1 - q x^{q-1} V_2 + \ldots \mp q x V_q \pm V_{q+1},$$

le total des termes amenés dans $H_{\nu+1}$ sera

$$(-1)^\nu z x^q (1-1)^q = 0 \qquad (\text{si } q \neq 0).$$

Dans H_ν, ce total serait

$$(-1)^\nu \frac{z}{\nu} x^{q-1} (1-1)^{q-1} = 0 \qquad (\text{si } q \neq 1).$$

Il en sera de même dans toutes les horizontales.

En résumé, les z amenés par les substitutions des lignes sont détruits par les substitutions des colonnes, sauf dans la diagonale principale où ils changent de signes avec ν impair, ce qui importe peu, puisque alors $f(z) = f(-z)$.

On aura donc finalement

$$(\mathrm{B}) \qquad f(z) = \begin{vmatrix} g+z & . & \ldots & l \\ \ldots\ldots & g - \dfrac{z}{\nu} & \ldots & k \\ c & \ldots\ldots & \ldots & . \\ b & c & \ldots & . \\ a & b & \ldots & g \pm z \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (B) jouit des propriétés suivantes :

1° Elle reste la même quand on y change les signes des coefficients b, d, f, ... : quand on y permute les coefficients a, b, c, ..., h, k, l équidistants des extrêmes et quand on y remplace a, b, c, ..., l par a, $\varphi_{n-1}(m)$, $\varphi_{n-2}(m)$, ..., $\varphi_1(m)$, $\varphi(m)$, quel que soit m, ou elle convient aux équations

$$\varphi(x) = 0, \qquad \varphi(-x) = 0, \qquad \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \qquad \varphi(m-x) = 0.$$

2° Avec ν *impair*, elle ne contient que les puissances paires de z, puisque $f(z) = f(-z)$, ou elle est de la forme

$$z^{\nu+1} + p\lambda z^{\nu-1} + q\Delta z^{\nu-3} + \ldots + sR = 0,$$

p, q, ..., s étant numériques.

3° Si ν est *pair*, elle ne contient pas le second terme, car, si l'on développe $f(z)$, après avoir multiplié les lignes par $1, \nu, \frac{\nu(\nu-1)}{2}, \ldots,$ le coefficient de z^ν sera

$$\pm g\left(1-\nu+\frac{\nu(\nu-1)}{2}-\ldots\mp\nu\pm1\right)=\pm g(1-1)^\nu=0$$

ou elle est de la forme

$$z^{\nu+1}+p\lambda z^{\nu-1}+q'\omega z^{\nu-2}+\ldots+s'R.$$

4° La fonction λ s'obtient facilement en remplaçant dans $\varphi(x)$ les puissances croissantes de x par $a, b, c, \ldots, k, l,$ comme on peut s'en assurer en développant.

5° On a

$$\lambda'=\lambda, \qquad \omega'=\omega, \qquad \Delta'=\Delta, \qquad \ldots, \qquad R'=R.$$

6° Si l'équation (A) a $\nu+1$ racines égales annulant φ, φ_1, φ_2, ..., φ_ν, on aura les conditions de multiplicité

$$\lambda=0, \qquad \omega=0, \qquad \Delta=0, \qquad \ldots, \qquad R=0,$$

avec ν pair.

Quant aux relations qui lient les racines de (B) à celles de (A), on les trouvera en s'aidant de celles qui, dans chacune d'elles, lient ses racines à ses coefficients.

Applications. — I. $n=2$ ou

$$\varphi(x)=ax^2-2bx+c=0.$$

Si

$$\lambda=b^2-ac,$$

on a

$$z^2-\lambda=0.$$

II. $n=4$ ou

$$\varphi(x)=ax^4-4bx^3+6cx^2-4dx+e=0.$$

Si

$$3\lambda=3c^2-4bd+ae, \qquad \omega=\begin{vmatrix} c & d & e \\ b & c & d \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

on a

$$z^3-3\lambda z-2\omega=0.$$

Avec une racine double annulant φ et φ_1, on a

$$\varphi_2^2 = \lambda', \qquad \varphi_2^3 = \omega'$$

et, par suite,

$$\lambda^3 - \omega^2 = 0 \qquad \text{(résultante de Cayley).}$$

D'ailleurs $\lambda = 0$, $\omega = 0$ avec une racine triple.

III. $n = 6$ ou

$$\varphi(x) = ax^6 - 6bx^5 + 15cx^4 - 20dx^3 + 15ex^2 - 6fx + g = 0.$$

Si

$$10\lambda = 10d^2 - 15ce + 6bf - ag, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} d & e & f & g \\ c & d & e & f \\ b & c & d & e \\ a & b & c & d \end{vmatrix},$$

on a

$$z^4 - 10\lambda z^2 + 9\Delta = 0.$$

Avec une racine triple annulant φ, φ_1, φ_2, on a

$$\varphi_3^2 = \lambda', \qquad \varphi_3^4 = \Delta' \qquad \text{et, par suite,} \qquad \lambda^2 = \Delta.$$

D'ailleurs,

$$\lambda = 0, \qquad \Delta = 0$$

avec une racine quadruple.

1932.

(1902, p. 336.)

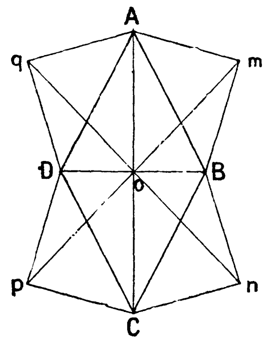
Étant donné un quadrilatère convexe ABCD, *on considère des plans reliés aux tiges* AB, BC, CD, DA. *On demande de trouver, respectivement dans ces plans, quatre points m, n, p, q tels que la droite mp soit égale et perpendiculaire à la droite nq pour toutes les déformations du quadrilatère. Démontrer que les milieux des droites mp, nq et des diagonales du quadrilatère sont les sommets d'un carré.* (J. Réveille.)

SOLUTION

Par M. *Canon*.

Extérieurement au losange ABCD de centre O (*fig.* 1) pre-

Fig. 1.



nons sur les bissectrices des angles formés par les diagonales AC, BD les points m, n, p, q à égales distances de O. Les droites mp, nq sont alors égales et à angle droit. Le losange étant supposé articulé, si on le déforme, les droites mp, nq passeront toujours par le point O. Si la droite mO doit toujours être la bissectrice de l'angle BOA, il faut que le point m soit le sommet de l'angle droit du triangle rectangle isoscèle AmB; car les points A, m, B, O sont toujours sur un cercle puisque alors les angles AmB, BOA sont droits et par suite l'angle mOA est égal à mBA, c'est-à-dire à 45°.

Ainsi :

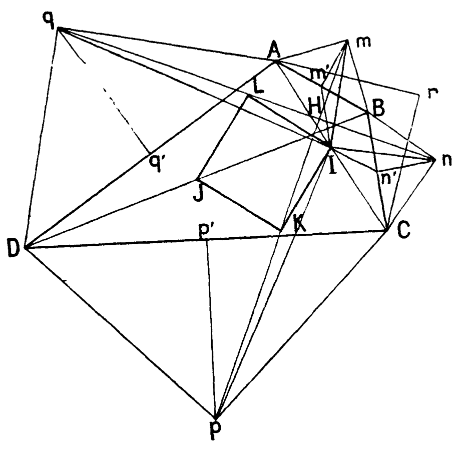
Si les triangles rectangles isoscèles AmB, BnC, CpD, DqA *sont liés invariablement aux côtés* AB, BC, CD, DA, *les droites mp, nq sont égales et à angle droit quelle que soit la déformation du losange articulé* ABCD.

Nous allons voir que cette propriété est vraie pour un quadrilatère convexe quelconque.

Prenons (*fig.* 2) le quadrilatère ABCD et les triangles rectangles isoscèles AmB, BnC, CpD, DqA. Appelons m', n',

p', q', I, J les milieux des côtés et des diagonales du quadrilatère. Menons les droites $\mathrm{I}m'$, $\mathrm{I}n'$, mm', nn'. Le segment mm' est égal à $m'\mathrm{B}$ et alors aussi à $\mathrm{I}n'$; de plus mm' est perpendiculaire à $\mathrm{I}n'$. De même nn' est égal et perpendiculaire à $\mathrm{I}m'$. Et comme les angles $nn'\mathrm{I}$, $\mathrm{I}m'm$ sont égaux, nous voyons que les triangles $nn'\mathrm{I}$, $\mathrm{I}m'm$ sont égaux et ont leurs côtés respectivement perpendiculaires; par suite les segments $\mathrm{I}m$, $\mathrm{I}n$ sont égaux et à angle droit. Il en est de même de $\mathrm{I}p$, $\mathrm{I}q$. Les angles $n\mathrm{I}q$, $m\mathrm{I}p$ étant égaux, les triangles $n\mathrm{I}q$,

Fig. 2.



$m\mathrm{I}p$ sont égaux et ont leurs côtés respectivement perpendiculaires, donc *les segments* mp, nq *sont bien égaux et à angle droit, quel que soit le quadrilatère convexe* ABCD.

On peut dire que le point I est le centre de rotation autour duquel on peut faire tourner le segment mp pour l'amener en coïncidence avec nq. Le milieu K de ce segment mp vient coïncider avec le milieu L de nq, *les segments* iK, iL *sont donc égaux et à angle droit.*

On peut dire de même, en appelant J le milieu de BD, que *les segments* JL, JK *sont égaux et à angle droit.*

Les points I, K, J, L sont alors sur un cercle. Mais le point I, étant à égales distances des droites mp, nq, est sur la bissectrice HI de l'angle $p\mathrm{H}n$. De même le point J est sur la bissectrice de l'angle droit pHq. L'angle JHI est alors droit et le cercle JLIK passe par le point H.

Le segment IJ est un diamètre de ce cercle et l'angle JLI est droit, donc le quadrilatère IKJL est un carré.

Remarques. — I. Cette dernière propriété est indépendante du quadrilatère. *Lorsque l'on a deux segments égaux à angle droit, les centres de rotation qui permettent d'amener l'un des segments en coïncidence avec l'autre et les milieux des deux segments sont les sommets d'un carré.*

II. Dans le courant de la démonstration précédente se trouve établi ce théorème :

On a un triangle quelconque ABC (*fig.* 2) *et les triangles rectangles isoscèles* AmB, BnC; *les droites qui vont du milieu* I *de* AC *aux sommets* m *et* n *sont égales et à angle droit.*

III. En s'appuyant sur cette propriété, on voit tout de suite que, *si* ABCD *est un parallélogramme, le quadrilatère* $mnpq$ *est un carré.*

IV. Réunissons en A les sommets A et B du quadrilatère. On n'a plus alors que le triangle ADC. Soit r le sommet de l'angle droit du triangle rectangle isoscèle extérieur à ADC et dont l'hypoténuse est AC : *le segment* Ap *est égal et perpendiculaire à* qr.

V. On a une droite telle que Ap pour les sommets B, C. Ces droites coïncidant avec les hauteurs du triangle pqr passent par un même point, on retrouve ainsi que : *les droites partant de* A, C, D *et aboutissant respectivement aux sommets* p, q, r *passent par un même point.*

Note. — L'élégante réponse de M. *Canon* ne fait connaître qu'une solution particulière de la question 1932. Le problème est assez facilement abordable par l'emploi des imaginaires [1]

[1] Pour l'application des imaginaires à la théorie des systèmes articulés, on consultera utilement un Mémoire de M. Darboux (*Bulletin des Sciences mathematiques*, 1879, p. 151).

(*méthode des équipollences*). On parvient ainsi aux résultats suivants, que je laisse au lecteur le soin d'établir :

PREMIÈRE HYPOTHÈSE. — *Le quadrilatère* ABCD *n'est pas un parallélogramme.*

Construisons un carré $\alpha\beta\gamma\delta$, de centre ω, et un triangle $I\omega K$, isoscèle et rectangle en ω, tel que le sens dans lequel il faut parcourir le périmètre du carré pour rencontrer les sommets dans l'ordre α, β, γ, δ soit le sens de la rotation d'un angle droit qui amène ωI sur ωK

le triangle	AmB	directement semblable au triangle	$I\alpha K$,
»	BnC	»	$I\beta K$,
»	CpD	»	$I\gamma K$,
»	DqA	»	$I\delta K$.

Le segment mp est égal et perpendiculaire au segment nq, et cette propriété subsiste quand le quadrilatère ABCD *se déforme, les côtés* AB, BC, CD, DA *entraînant respectivement les points m, n, p, q.*

Cette construction fait connaître la solution, aussi générale que possible, de la question 1932.

On obtient la solution de M. *Canon* en supposant que le carré $\alpha\beta\gamma\delta$ se réduit au point ω.

Il est à noter que la propriété énoncée à la fin de la question 1932 : *les milieux des droites mp, nq et des diagonales du quadrilatère sont les sommets d'un carré,* ne se vérifie pas en général.

SECONDE HYPOTHÈSE. — *Le quadrilatère* ABCD *est un parallélogramme.*

Il suffit alors que le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ soit un *parallélogramme,* et non plus nécessairement un *carré.* Sa construction se poursuit exactement comme dans la première hypothèse.

R. B.

2001.

(1904, p. 128.)

L'hyperboloïde déterminé par l'axe d'une quadrique de révolution et par deux droites conjuguées par rapport à cette quadrique est équilatère. (R. BRICARD.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

Soient

$$A(x^2+y^2) - Cz^2 - 1 = 0$$

l'équation de la quadrique donnée,

$$\frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma},$$
$$\frac{x-a'}{\alpha'} = \frac{y-b'}{\beta'} = \frac{z'-c'}{\gamma'}$$

celles des droites conjuguées, on a

$$(1)\qquad A(aa' - bb') + Ccc' = 1,$$
$$(2)\qquad A(\alpha\alpha' - \beta\beta') - C\gamma\gamma' = 0,$$
$$(3)\qquad A(a\alpha' - b\beta') + Cc\gamma' = 0,$$
$$(4)\qquad A(a'\alpha + b'\beta) + Cc'\gamma = 0;$$

λ étant la cote d'un point P de l'axe des z, les équations de la parallèle menée, par l'origine, à la droite menée par P et rencontrant les deux droites sont

$$x(b\gamma - c\beta) - y(c\alpha - a\gamma) - z(a\beta - b\alpha) - \lambda(bx - ay) = 0.$$
$$x(b'\gamma' - c'\beta') + y(c'\alpha' - a'\gamma') - z(a'\beta' - b'\alpha') - \lambda(b'x - a'y) = 0.$$

Après avoir éliminé λ, il faut vérifier que la somme des coefficients des carrés de x, y et z est nulle ou

$$(aa' + bb')(\gamma - \gamma') - c'(a\alpha' + b\beta') - c(a'\alpha + b'\beta) = 0.$$

Nous pourrons prendre $\gamma = \gamma' = 1$, en tenant compte des relations (3) et (4), la condition est vérifiée.

Si γ ou $\gamma' = 0$, la droite correspondante est parallèle au plan xOy, l'autre rencontre l'axe de révolution; l'hyperboloïde se réduit à deux plans perpendiculaires.

AUTRE SOLUTION

Par M. R. B.

Soient (Q) la quadrique de révolution, X son axe, D et Δ les deux droites. Appelons G et Γ les deux droites qui rencontrent X, D, Δ et la droite de l'infini du plan équatorial de (Q). La conjuguée de G doit rencontrer les conjuguées de ces quatre droites, c'est-à-dire les quatre droites elles-mêmes, prises dans un autre ordre : cette conjuguée est donc Γ. On voit ainsi que les droites G et Γ, qui rencontrent X à angle droit, sont aussi rectangulaires entre elles.

De là résulte que l'hyperboloïde (H) défini dans l'énoncé renferme trois droites rectangulaires deux à deux : cela établit la proposition énoncée.

Remarque. — Soit ABA'B' un quadrilatère gauche tracé sur (Q), AB, A'B' étant deux génératrices d'un système, BA', B'A deux génératrices de l'autre système. L'une des bissectrices de l'angle B'AB rencontre X; l'autre, α, est parallèle au plan équatorial (Π) de (Q). Soient β, α', β' les trois bissectrices analogues des autres angles du quadrilatère ABB'A'.

Les quatre droites α, β, α', β' *sont sur un paraboloïde* (P), *dont* (Π) *est un plan directeur*. En effet, elles sont toutes parallèles à (Π) et elles rencontrent toutes les deux diagonales AA', BB' du quadrilatère. Je supposerai, pour simplifier le langage, que (Π) est un plan horizontal.

Les plans tangents menés à (P) *par* X *sont rectangulaires*. En effet, ils sont déterminés par X et par les deux génératrices horizontales de P qui rencontrent cette droite : il est visible que ces deux génératrices ne sont autres que les droites G et Γ dont il a été question plus haut; elles sont donc rectangulaires, ce qui établit bien la proposition.

Considérons alors le contour apparent du paraboloïde (P), projeté horizontalement sur (Π). Ce contour apparent est une parabole qui touche les projections des quatre droites α, β, α', β', et dont la directrice passe par le pied de l'axe X sur (Π). *On obtient ainsi le théorème qui a fait l'objet de* *la question* **2002**, et dont M. Retali a donné une élégante démonstration directe (même Tome, p. 95).

Autres solutions par MM. G. Painvin et Troin.