MAURICE D'OCAGNE

Sur la déformation des coordonnées tangentielles dites « parallèles »

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 160-163
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__160_1>

[K6b]

SUR LA DÉFORMATION DES COORDONNÉES TANGENTIELLES DITES « PARALLÈLES »;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Pour opérer dualistiquement la transformation des nomogrammes à droites entrecroisées en d'autres à points alignés, il suffit, dans les équations qui définissent, en coordonnées cartésiennes, les systèmes cotés figurant sur les premiers, de substituer à ces coordonnées des coordonnées tangentielles. *Théoriquement,* on pourrait faire usage d'un quelconque de ces systèmes (pourvu que l'équation du point et de la droite unis y fût du premier degré) et notamment des coordonnées plückériennes définies par l'équation

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Mais *pratiquement* de telles coordonnées ont le grave inconvénient de ne pas représenter directement des segments comptés sur les axes; elles en sont les inverses, d'ailleurs changés de signe. Cela n'entraîne pas seulement des longueurs dans la construction des graduations (comme, par exemple, lorsqu'il faut, pour une échelle logarithmique, prendre les inverses de tous les logarithmes lus dans la Table, au lieu de porter directement des segments proportionnels à ces logarithmes, et même, tout simplement, de relever ces segments sur la graduation d'une règle à calcul); cela conduit encore, dans certains cas, fréquents dans la pratique, à des solutions absolument inacceptables; s'il s'agit, par exemple, d'une échelle sinusoïdale, comme on en rencontre constamment dans les applications ressortissant à la trigonométrie sphériqne (calculs nautiques en particulier), on voit que l'emploi des coordonnées plückériennes conduirait à une graduation s'étendant de $+1$ à $+\infty$ et de -1 à $-\infty$, c'est-à-dire rigoureusement impraticable.

Or, on peut se proposer de déterminer *a priori* un système de coordonnées tangentielles proportionnelles à des segments comptés sur les axes et donnant, pour le point et la droite unis, une équation du premier degré. Voici une façon simple de le faire :

Après avoir fait dépendre linéairement l'équation ponctuelle de la droite de deux paramètres u et v en la mettant sous la forme

$$(au+bv+c)x+(a'u+b'v+c')y+a''u+b''v+c''=0,$$

on peut l'écrire

$$(1)\quad (ax+a'y+a'')u+(bx+b'y+b'')v+cx+c'y+c''=0.$$

Considérons alors les trois droites

$$(A)\qquad ax+a'y+a''=0,$$

$$(B)\qquad bx+b'y+b''=0,$$

$$(C)\qquad cx+c'y+c''=0.$$

Si, comme on doit le supposer, *leur déterminant n'est pas nul,* elles forment un triangle ABC dont chaque sommet sera désigné par la lettre correspondant au côté opposé.

Si nous coupons la droite (1) par la droite (B) ou AC, nous avons, pour le point M d'intersection,

$$u = -\frac{cx + c'y + c''}{ax + a'y + a''}.$$

Or, les termes de cette fraction, quand on y fait varier x et y, sont proportionnels respectivement aux distances du point M aux droites (C) et (A), par suite à BM et à MC. On a donc, en représentant par λ une constante,

$$u = \lambda \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MC}}.$$

De même, si la droite (1) coupe BC en N,

$$v = \mu \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NC}},$$

μ étant une autre constante.

Introduisons une droite fixe $\mathrm{M_0N_0}$ quelconque; nous aurons

$$u = u_0 \frac{\mathrm{AM}\,.\,\mathrm{M_0C}}{\mathrm{AM_0}\,.\,\mathrm{MC}}, \qquad v = v_0 \frac{\mathrm{BN}\,.\,\mathrm{N_0C}}{\mathrm{BN_0}\,.\,\mathrm{NC}}.$$

Si nous rejetons maintenant la droite AB à l'infini, les rapports $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AM_0}}$ et $\frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{BN_0}}$ tendant vers l'unité (puisque les segments $\mathrm{MM_0}$ et $\mathrm{NN_0}$ restent finis), nous avons à la limite

$$u = \frac{u_0\,.\,\mathrm{M_0C}}{\mathrm{MC}}, \qquad v = \frac{v_0\,.\,\mathrm{N_0C}}{\mathrm{NC}},$$

et, comme nous sommes libres de choisir $\mathrm{M_0N_0}$ telle que $u_0\,.\,\mathrm{M_0C} = v_0\,.\,\mathrm{N_0C} = 1$,

$$u = \frac{-1}{\mathrm{CM}}, \qquad v = \frac{-1}{\mathrm{CN}}.$$

Ce sont les coordonnées plückériennes.

Pour avoir des coordonnées u et v proportionnelles à des segments comptés sur les axes on voit immédiatement qu'il suffit de rejeter, non pas la droite (C), mais le point C à l'infini. Les axes AC et BC deviennent alors *parallèles* et, en choisissant la droite M_0N_0 telle que $\frac{u_0}{AM_0} + \frac{v_0}{BN_0} = 1$, on a, à la limite,

$$u = AM, \qquad v = BN.$$

Ce sont les *coordonnées parallèles* que nous avons étudiées en détail dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. III, 1884, p. 410) et qui nous ont permis de présenter sous une forme pratique les nomogrammes à points alignés.