

PHILBERT DU PLESSIS
**Concours d'admission à l'École
polytechnique en 1904. Composition
de mathématiques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 257-264

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_257_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

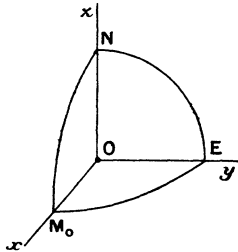
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1904.
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

PREMIÈRE QUESTION.

On donne une sphère de rayon r , de centre O origine de coordonnées rectangulaires Ox , Oy , Oz . Un point de cette sphère, primitivement situé en M_0 sur Ox , se déplace uniformément sur le grand cercle M_0N , de M_0



vers N , avec une vitesse angulaire ω . En même temps le plan primitivement situé en OM_0N tourne uniformément autour de ON , de OM_0N vers OEN , avec la même vitesse angulaire. Par suite de ce double mouvement, le point mobile considéré, au bout du temps t , occupera une certaine position M .

I. Déterminer en fonction de t les coordonnées du point M , les composantes de sa vitesse v , et celles de son accélération w suivant les directions des axes. Déter-

miner aussi la grandeur de la vitesse, celle de l'accélération tangentielle ω_t , et de l'accélération normale ω_n .

II. Construire les projections sur les trois plans coordonnés de la trajectoire de M.

III. 1° L'accélération totale de M étant représentée par une droite MW, et cette droite venant percer le plan des xy en P, déterminer dans ce plan le mouvement du point P.

2° Démontrer que la droite MW rencontre une droite fixe.

1. Au bout du temps t , le point M se trouve à la cote

$$z = r \sin \omega t,$$

par suite, sur un petit cercle, parallèle au plan Oxy , de rayon $r \cos \omega t$. D'ailleurs le plan zOM fait aussi avec zOx un angle égal à ωt . Les deux autres coordonnées sont, dès lors,

$$x = r \cos^2 \omega t, \quad y = r \cos \omega t \sin \omega t.$$

On peut donc écrire

$$(1) \quad \begin{cases} x = r \cos^2 \omega t, \\ y = r \sin \omega t \cos \omega t, \\ z = r \sin \omega t, \end{cases}$$

ou encore

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} x = \frac{r(1 + \cos 2\omega t)}{2}, \\ y = \frac{r \sin 2\omega t}{2}, \\ z = r \sin \omega t. \end{cases}$$

Il vient maintenant, par dérivation,

$$(2) \quad \begin{cases} x' = -r\omega \sin 2\omega t, \\ y' = r\omega \cos 2\omega t, \\ z' = r\omega \cos \omega t; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x'' = -2r\omega^2 \cos 2\omega t, \\ y'' = -2r\omega^2 \sin 2\omega t, \\ z'' = -r\omega^2 \sin \omega t; \end{cases}$$

d'où, pour la vitesse,

$$(4) \quad v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = r\omega \sqrt{1 + \cos^2 \omega t},$$

et pour l'accélération totale

$$(5) \quad w = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = r\omega^2 \sqrt{4 + \sin^2 \omega t}.$$

On a ensuite, pour l'accélération tangentielle,

$$(6) \quad w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{-r\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{1 + \cos^2 \omega t}},$$

et pour l'accélération normale,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} w_n &= \sqrt{w^2 - w_t^2} \\ &= r\omega^2 \sqrt{4 + \sin^2 \omega t - \frac{\sin^2 \omega t \cos^2 \omega t}{1 + \cos^2 \omega t}} \\ &= r\omega^2 \sqrt{\frac{5 + 3 \cos^2 \omega t}{1 + \cos^2 \omega t}}. \end{aligned} \right.$$

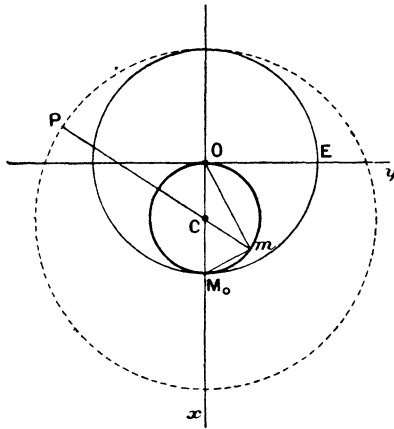
II. L'élimination de ωt , entre les équations (1) ou (1 bis), prises deux à deux, donne immédiatement, pour les projections de la trajectoire sur les plans coordonnés,

$$(8) \quad x^2 + y^2 = rz,$$

(260)

cercle décrit sur OM_0 comme diamètre (*fig. 1*),

Fig. 1.

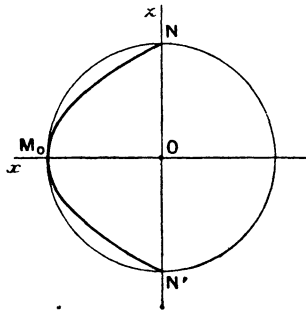


(9)

$$z^2 + rz = r^2,$$

parabole de sommet M_0 et d'axe OM_0 (*fig. 2*), passant

Fig. 2.



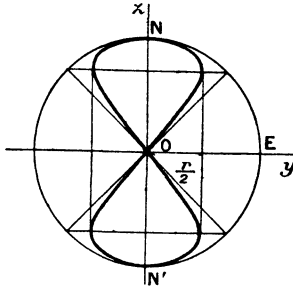
par les extrémités du diamètre de la sphère dirigé suivant Oz , ayant un paramètre égal à $\frac{r}{2}$, et dont la partie utile est limitée à Oz ,

(10)

$$z^4 + r^2 y^2 = r^2 z^2,$$

quartique en forme de huit (*fig. 3*) (dite parfois *lemniscate de Geronon*), symétrique par rapport à Oy et Oz , ayant pour tangentes en son point double O les

Fig. 3



bissectrices des axes, et coupant Oz aux mêmes points que la parabole.

Remarques géométriques. — 1° Si m est la projection de M sur le plan Oxy (*fig. 1*), les triangles OMm et OM_0m , qui ont en commun le côté Om , sont égaux, puisque $OM = OM_0$, et que les angles MOm et M_0Om sont tous deux égaux à ωt .

Il en résulte que l'angle OmM_0 est droit et, par suite, que le lieu de m est le cercle décrit sur OM_0 comme diamètre.

En outre, si C est le centre de ce cercle, milieu de OM_0 , l'angle au centre M_0CM étant double de M_0Om , est égal à $2\omega t$, ce qui montre que le point m décrit uniformément le cercle OM_0 , dans le sens direct, avec la vitesse angulaire 2ω .

2° Si M' est la projection de M sur le plan Oxz , m' celle de M' sur Ox , on a

$$M'm' = Mm = M_0m.$$

Or, dans le cercle OmM_0 ,

$$\overline{M_0 m}^2 = r \cdot M_0 m'.$$

Donc,

$$\overline{M' m'}^2 = r \cdot M_0 m',$$

ce qui démontre que le lieu de M' est la parabole trouvée ci-dessus analytiquement.

III. Les équations de la droite MP suivant laquelle est dirigée l'accélération sont

$$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}.$$

Cette droite coupe donc le plan Oxy au point P de coordonnées

$$X = x - \frac{zx''}{z''}, \quad Y = y - \frac{zy''}{z''},$$

ou, d'après (1 bis),

$$X = \frac{r(1-3\cos 2\omega t)}{2}, \quad Y = -\frac{3r\sin 2\omega t}{2},$$

qu'on peut écrire

$$X = 2r - 3x, \quad Y = -3y.$$

Portons l'origine au point C milieu de OM_0 , en changeant x en $x_1 + \frac{r}{2}$.

Nous avons

$$X_1 = -3x_1, \quad Y = -3y.$$

Donc, le point P se trouve sur la droite Cm (*fig. 1*) à une distance, au delà de C , triple de Cm . Par suite, le point P décrit un cercle concentrique à celui que décrit m et de rayon triple; et, comme nous venons de voir que la droite Cm (ou CP) tourne autour de C dans

le sens direct avec une vitesse angulaire 2ω , le point P décrit ce cercle uniformément, et dans le sens direct.

On peut remarquer que les cercles (m) et (P) sont les cercles de centre C tangents au cercle d'équateur de la sphère.

Puisque la droite mP passe par C, la droite MP, dont elle est la projection, rencontre constamment la parallèle à Oz menée par C.

D'une manière générale, il est d'ailleurs évident que si le mouvement d'un point M se projette sur un plan suivant un mouvement circulaire uniforme de centre C, l'accélération du point M rencontre la perpendiculaire au plan, menée par C. En effet, la projection de l'accélération sur ce plan, qui est l'accélération du mouvement projeté, passe par C.

SECONDE QUESTION.

Déterminer à 0,001 près la racine positive de l'équation $x^3 + x^2 - 27,48 = 0$, en appliquant la méthode d'approximation de Newton.

On a

$$f(x) = x^3 + x^2 - 27,48,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x,$$

$$f''(x) = 6x + 2.$$

Comme on a $f(2,7) < 0$, $f(2,8) > 0$, on voit que

$$2,7 < x < 2,8.$$

En outre $f(2,8)$ étant positif comme $f''(2,8)$, on appliquera la méthode à partir de 2,8.

Enfin le maximum M de $f''(x)$ dans l'intervalle considéré est

$$M = f''(2,8) = 18,8,$$

(264)

et l'on a

$$\frac{M}{2 f'(2,8)} = \frac{18,8}{2 \times 29,12},$$

qui est < 1 . Il en résulte, puisque l'intervalle

$$2,8 - 2,7 = 0,1,$$

qu'il suffira de deux applications de la méthode à partir de 2,8 pour avoir l'approximation de 0,001. D'où le calcul :

Première approximation : $x_0 = 2,8$.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2,312, \\ f'(x_0) &= 29,12, & \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= 0,0794, & x_1 &= 2,8 - 0,0794 \\ f''(x_0) &= 18,8, & & & &= 2,7206. \end{aligned}$$

Seconde approximation : $x_1 = 2,7206$.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= 0,0585, \\ f'(x_1) &= 27,646, & \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= 0,0021, & x_2 &= 2,7206 - 0,0021 \\ f''(x_1) &= 18,3236, & & & &= 2,7185. \end{aligned}$$

Donc, à 0,001 près, $x = 2,718$ (nombre e avec 3 décimales).