Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 234-240

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__234_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1853.

(1900, p. 288.)

On considère la surface engendrée par un cercle de grandeur invariable qui se déplace suivant une loi quelconque; montrer que les normales à cette surface, menées au point, qui appartiennent au cercle mobile dans une de ses positions, s'appuient sur deux droites.

(R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. R. Bricard.

Le théorème est encore vrai si, dans l'énoncé, on remplace le mot *cercle* par les mots *hélice tracée sur un cylindre de révolution*.

Soient H l'hélice considérée dans une de ses positions, (S) la surface qu'elle engendre dans son déplacement.

Les normales à (S), aux différents points de H, sont :

1° Normales aux trajectoires de ces points;

2° Normales à H.

Elles appartiennent donc, en vertu des théorèmes connus, à deux complexes linéaires et font, par conséquent, partie d'une congruence linéaire. C. Q. F. D.

Dans le cas où H se réduit à un cercle, l'une des deux directrices de la congruence linéaire est évidemment l'axe du cercle; l'autre est la conjuguée de cet axe dans le déplacement.

1949.

(1902, p. 575)

On considère dans un plan quatre couples de points AA', BB', CC', DD' *et les six contours quadrangulaires*

D'BA'C, DB'AC',
D'CB'A, DC'BA',
D'AC'B, DA'CB'.

On peut inscrire à ces contours six coniques qui soient bitangentes à une même conique. (G. Fontené.)

SOLUTION

Par un abonné.

On peut inscrire à cinq des six contours quadrangulaires cinq coniques qui soient bitangentes à une même conique. Supposons que, par une transformation homographique, on ait fait de cette dernière conique un cercle; si O est le sommet de l'un des deux cônes isotropes qui passent par ce cercle, en joignant le point O à tous les points de la figure et en coupant par une sphère de centre O, on a à démontrer le fait suivant : Étant donnés sur une sphère quatre couples de points AA', BB', CC', DD' et les six contours quadrangulaires analogues à ceux de l'énoncé, si cinq de ces contours sont circonscriptibles à des cercles, le sixième est également circonscriptible à un cercle. Or, en adoptant l'hypothèse de contours convexes, afin d'écarter des difficultés secondaires [1], les trois premières conditions de circonscriptibilité sont :

$$\begin{aligned} D'B - BA' + A'C - CD' &= 0, \\ D'C - CB' + B'A - AD' &= 0, \\ D'A - AC' + C'B - BD' &= 0, \end{aligned}$$

et l'une d'elles peut être remplacée par celle-ci :

$$- BA' + A'C - CB' + B'A - AC' + C'B = 0;$$

la même chose ayant lieu pour les trois autres conditions de circonscriptibilité, le théorème est démontré.

Un cas singulier de la figure précédente se rencontre dans le problème de Malfatti étendu à la sphère. Soient ABC un triangle sphérique, D' le pôle intérieur du cercle inscrit; les cercles inscrits aux triangles sphériques D'BC, D'CA, D'AB touchant les côtés BC, CA, AB en des points A', B', C', et l'on peut regarder la figure D'BA'C, par exemple, comme le cas limite d'un quadrilatère circonscriptible; les deux cercles tangents à D'A ont une seconde tangente commune de même espèce que D'A, laquelle passe en A', et les trois tangentes communes que l'on obtient ainsi concourent en un point D; les trois quadrilatères DB'AC', DC'AB', DA'BC' sont circonscriptibles à des cercles tangents entre eux deux à deux.

1975.

(1903, p. 384.)

D'un point P *du plan d'une parabole on abaisse les trois normales à la courbe dont les pieds sont* A, B, C. *Par chacun des pieds* A, B, C *on mène la droite symétrique respectivement de* PA, PB, PC *par rapport à la direction de l'axe de la parabole. Démontrer que ces trois droites concourent en un point* P' *et que la projection de la distance* PP' *sur l'axe est constante.* (E.-N. Barisien.)

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure, en plaçant par exemple les points A, B, C et le point D' sur l'hémisphère vu, les arcs D'A, D'B, D'C rayonnant autour de D'; les quatre autres points seront dans le voisinage des points diamétralement opposés aux premiers; les six côtés du contour BA', A'C, CB', ... franchissent le contour apparent.

SOLUTION

Par M. A.-H. COUVERT.

La première partie de l'énoncé n'est qu'un cas particulier d'un théorème démontré par M. Duporcq, à propos de la question 1803 (voir *N. A. M.*, 1901, p. 474). Nous allons démontrer cette propriété analytiquement. Pour cela, nous écrirons d'une part l'équation aux y des pieds des normales issues de $P(\alpha, \beta)$ à la parabole $y^2 - 2px = 0$, d'autre part l'équation aux y des pieds des droites symétriques des normales par rapport à la direction de l'axe issues d'un point $P'(u, v)$. L'équation d'une normale PA est

$$Y - y = -\frac{y}{p}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right).$$

Exprimons qu'elle passe en P, nous avons

$$(\beta - y)2p^2 + y(2p\alpha - y^2) = 0$$

ou

$$(1) \qquad -y^3 + 2p(\alpha - p)y + 2p^2\beta = 0.$$

Une droite telle que P'A sera

$$Y - y = \frac{y}{p}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right).$$

Écrivons qu'elle passe en P' :

$$(v - y)2p^2 - y(2pu - y^2) = 0$$

ou

$$(2) \qquad y^3 - 2p(u + p)y + 2p^2 v = 0.$$

Il y a donc trois droites telles que P'A issues d'un point P', de même qu'il y a trois normales issues de P. Écrivons que ces deux séries de trois droites se correspondent; il suffit d'identifier (1) et (2). Cela donne

$$-1 = \frac{\alpha - p}{-u - p} = \frac{\beta}{v}.$$

D'où

$$(3) \qquad u = \alpha - 2p \qquad \text{et} \qquad v = -\beta.$$

On voit qu'à tout point P du plan correspond un point P', ce qui démontre la première partie de l'énoncé. En outre, de $u = \alpha - 2p$, on tire

$$\alpha - u = 2p,$$

ce qui montre que la projection de PP' sur l'axe est constante et égale à $2p$.

Remarques. — On peut ajouter quelques propriétés intéressantes :

I. La droite PP' a pour équation

$$\frac{y-\beta}{\beta - v} = \frac{x-\alpha}{\alpha - u}$$

ou

$$(4)\qquad p(y-\beta) - \beta(x-\alpha) = 0.$$

On déduit facilement de cette équation le résultat suivant :

Si P *décrit une hyperbole équilatère d'équation*

$$p(B-y) - y(A-x) = 0,$$

la droite PP' *passe par un point fixe* (A, B).

II. Lorsque le point P décrit une droite (D), le point P' décrit une autre droite (D') également inclinée sur l'axe de la parabole et PP' enveloppe une parabole dont l'axe est perpendiculaire à celui de la proposée.

Reprenons en effet les équations (3). Soit

$$(5)\qquad y = mx + n$$

la droite (D). On a

$$\alpha = u + 2p, \qquad \beta = -v.$$

Portons ces valeurs de α, β à la place de x, y dans (5); cela donne :

$$-v = m(u+2p) + n \qquad \text{ou} \qquad v = -mu - 2mp - n.$$

On voit que le lieu de P' est une droite (D') de coefficient angulaire égal à $-m$, ce qui démontre la première partie.

Pour chercher l'enveloppe de PP', mettons l'équation de (D) sous la forme $x = \lambda y + \mu$ et remplaçons α par $\lambda\beta + \mu$ dans (4); cela donne

$$p(y - \beta) - \beta(x - \lambda\beta - \mu) = 0$$

ou

$$\lambda\beta^2 - (p + x - \mu)\beta + py = 0.$$

L'enveloppe de cette droite est

$$(x + p - \mu)^2 - 4\lambda py = 0.$$

C. Q. F. D.

III. 1° Lorsque la droite (D) est l'ordonnée $x = p$, les points P et P' sont symétriques par rapport au sommet de la parabole;

2° Lorsque la droite (D) est l'ordonnée $x = \frac{3}{2}p$, la droite PP' passe constamment par le foyer de la parabole;

3° Lorsque (D) est un diamètre de la parabole, PP' a une direction fixe.

Ces derniers résultats se vérifient aisément.

Autre solution par M. Letierce.

1976.

(1903, p. 384)

I et O sont les centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC. On projette sur IO les points de contact du cercle I et des côtés du triangle : la somme algébrique des rayons projetants est nulle. (G. Fleuri.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Désignons par α, β, γ les points de contact du cercle (I) et des côtés BC, CA, AB. Pour démontrer la proposition, il suffit de faire voir que le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$ est sur la droite OI.

Soit ε le milieu du côté $\beta\gamma$; la polaire de ε, par rapport au cercle (I), est parallèle à $\beta\gamma$ et passe par A; c'est donc la bissectrice extérieure du triangle ABC, relative au sommet A. Donc le pôle de la médiane $\alpha\varepsilon$ par rapport à I est le pied de cette bissectrice extérieure.

Par suite, si Δ est la droite joignant les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC, nous concluons que Δ est la polaire par rapport à (I) du centre de gravité de $\alpha\beta\gamma$.

Mais on sait (*Traité de Géométrie* de Rouché, *Géométrie du triangle*) que Δ est perpendiculaire à IO ; donc le centre de gravité de $\alpha\beta\gamma$ est sur la droite IO.

C. Q. F. D.

Autres solutions de MM. Plakhowo, F. Farjon, Barisien, Alasia.