

## Certificats de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 4  
(1904), p. 219-234

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1904\\_4\\_4\\_219\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_219_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

---

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Un mobile de masse  $m$  est soumis à l'action d'une force centrale répulsive constante  $F = mk$  émanant du point  $O$ . Ce mobile part du point  $A$  ( $OA = a$ ) avec une vitesse dont l'intensité est  $v_0 = \sqrt{2ka}$  et de direction à déterminer.*

*Le point  $A$  est situé sur l'axe  $Ox$ . On prend sur  $Ox$  le*

point B symétrique du point A par rapport au point O. Parmi les courbes allant de A en B, situées dans le plan  $xOy$  et qu'on peut forcer le mobile à parcourir en le lançant suivant la tangente en A avec la vitesse  $v_0 = \sqrt{2ka}$ , quelle est celle qui est brachistochrone ?

II. Une plaque matérielle homogène, non pesante, a la forme d'une ellipse; elle est mobile autour d'un axe fixe Oz perpendiculaire à son plan au centre O de l'ellipse. La masse de cette lame est  $4m$ . Un point matériel M de masse  $m$  peut se mouvoir, sans frottement, le long du contour de cette ellipse. Ce point est attiré par le point O proportionnellement à la distance (on désignera par  $\mu^2$  la valeur absolue du coefficient de proportionnalité, par  $a$  et  $b$  les demi-axes de l'ellipse).

1° Étudier le mouvement du système en prenant les conditions initiales suivantes : le point est d'abord au sommet A du grand axe, la vitesse de la plaque est nulle;

2° Montrer que l'on peut déterminer la vitesse initiale du point, de façon que l'ellipse reste immobile : déduire des équations du mouvement général la valeur de cette vitesse particulière en fonction des données.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une demi-ellipse est plongée dans un liquide. Le grand axe, qui la limite, est horizontal et situé dans le plan de charge. Le liquide vient jusqu'à ce plan et confine au vide.

On demande :

1° Le centre de pression de cette demi-ellipse;

2° La longueur du pendule simple synchrone du pendule composé que l'on obtiendrait en faisant osciller la demi-ellipse, supposée homogène, autour de son axe horizontal supposé fixe (les oscillations ayant lieu dans le vide bien entendu).

(Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Un quadrilatère, en général gauche, LPQR, de forme invariable, de masse nulle, peut tourner autour du côté LP qui est fixe. Le côté opposé QR constitue l'axe d'un solide homogène de révolution (S). Ce solide peut tourner autour de QR et glisser le long de cette droite. Les seules forces agissant sur (S) proviennent des

*liaisons qui sont toutes sans frottement. L'état initial des vitesses étant donné, trouver le mouvement ultérieur.*

*On intégrera, dans le cas général, les équations différentielles du problème.*

*On étudiera le mouvement du centre de gravité G de (S) dans le cas particulier où LP et QR se rencontrent, et où la vitesse initiale de G est perpendiculaire à LP.*

*Appeler :*

$\theta$  l'angle de LP et QR;  
a leur plus courte distance.

*Définir la position de (S) par les paramètres suivants : distance  $\rho$  du centre de gravité G au point g où la perpendiculaire commune à LP et QR rencontre cette dernière droite;*

*angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  définissant l'orientation relative des deux trièdres trirectangles  $Ox_1y_1z_1$  et  $Gxyz$ ;*

*$Ox_1y_1z_1$  est fixe;*

*$Oz_1$  coïncide avec LP;*

*$Gxyz$  constitue un système d'axes principaux d'inertie de (S);*

*Gz coïncide avec QR.*

#### SOLUTION.

Les équations de Lagrange s'appliquent naturellement à ce problème. La force vive  $2T$  est une forme quadratique de  $\frac{d\psi}{dt}$ ,  $\frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\frac{d\rho}{dt}$ , dont les coefficients ne dépendent que de  $\rho$ .

On a deux intégrales premières en utilisant les équations de Lagrange relatives à  $\psi$  et  $\varphi$ ; on a, en outre, l'intégrale des forces vives. Le temps  $t$  et les variables  $\psi$  et  $\varphi$  s'expriment par des intégrales de fonctions algébriques de la variable  $\rho$ .

**ÉPREUVE PRATIQUE.** — *Un disque circulaire matériel homogène, de masse  $m$ , de rayon  $r$ , d'épaisseur négligeable, peut tourner autour de l'un de ses diamètres  $\Delta$ .*

*Il est soumis à l'action d'un couple tendant à s'opposer à son mouvement. L'axe du couple est parallèle à  $\Delta$ ; le moment du couple  $C\theta$  est proportionnel à l'angle  $\theta$  dont le disque a tourné à partir de l'une de ses positions.*

On imprime au disque, placé dans sa position d'équilibre, une rotation initiale inconnue  $\omega$ ; on observe l'angle maximum d'écart avec la position d'équilibre; soit  $\theta$  cet angle. Calculer la durée des oscillations qui se produisent et la vitesse  $\omega$ .

Dans une seconde expérience, on adjoint au couple précédent un autre couple résistant, d'axe parallèle à  $\Delta$ , de moment proportionnel à la vitesse angulaire de rotation. On lance le disque comme précédemment. Il revient, pour la première fois, à sa position d'équilibre au bout d'un temps  $T$ . Déterminer le second couple.

APPLICATION NUMÉRIQUE :  $m = 0^g, 1$ ,  $r = 0^{cm}, 5$ . — Le moment du premier couple, pour une rotation d'un angle droit, est de  $54^{mg \cdot cm}$ . L'angle  $\theta$  est de  $45^\circ$ . Dans la seconde expérience le temps  $T$ , séparant le départ du moment où le disque repasse par sa position d'équilibre, est trois fois plus grand que dans la première.

## SOLUTION.

Dans le premier cas, l'équation du mouvement est

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + C \theta = 0 \quad \text{avec} \quad I = \frac{m \pi^2}{4};$$

en posant  $\sqrt{\frac{C}{I}} = \alpha_1$ , on a

$$\theta = \theta \sin \alpha_1 t.$$

La durée d'une demi-oscillation est

$$T_1 = \frac{\pi}{\alpha_1};$$

la période  $2T_1$ , la vitesse initiale  $\alpha_1 \theta$ .

L'équation du mouvement relative à la seconde expérience est

$$(1) \quad I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + R \frac{d\theta}{dt} + C \theta = 0$$

( $R$  est une constante à déterminer).

Pour que le disque repasse par sa position d'équilibre au

bout d'un temps fini, il faut que l'équation caractéristique de (1) ait ses racines imaginaires.

On a alors

$$\theta = A e^{-\frac{R}{2I}t} \sin \alpha_2 t,$$

A étant une constante, et  $\alpha_2$  égal à  $\frac{\sqrt{4IC - R^2}}{2I}$ ;

$$T = \frac{\pi}{\alpha_2},$$

et le calcul de R est immédiat.

On emploie les unités C. G. S. pour l'application numérique. (Un changement d'unités est nécessaire pour le moment du premier couple et pour l'angle maximum d'écart.)

(Novembre 1903.)

### Lille

ÉPREUVE ÉCRITE : CINÉMATIQUE. — *Construction de Savary pour déterminer le centre de gravité de l'enveloppe d'un profil invariablement lié à une figure plane se déplaçant dans son plan, ou de la trajectoire d'un point de cette figure.*

DYNAMIQUE. — *Application du théorème de D'Alembert à l'extension des théorèmes généraux de la Mécanique aux systèmes à liaisons.*

PROBLÈME. — *Un point matériel, de masse 1, assujéti à se mouvoir sans frottement sur une sphère de rayon 1, est attiré, en raison inverse du cube de la distance, par trois plans rectangulaires deux à deux passant par le centre de la sphère.*

1° *Démontrer que, dans le mouvement, la réaction de la sphère est constante;*

2° *Trouver les équations finies de la trajectoire qui est une courbe algébrique (conditions initiales quelconques);*

3° *Déterminer les positions d'équilibre du point.*

### SOLUTION.

Les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{a}{x^3} + R x, \quad \dots$$

donnent

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + \frac{c}{z^2} = h$$

( $h$  constante des forces vives); puis

$$R = x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} - \frac{c}{z^2}$$

ou

$$R = \frac{d}{dt} \left( x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} \right) - h = -h.$$

Il vient ensuite

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{a}{x^2} - hx^2 + \alpha \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes}).$$

.....

De là on déduit

$$\sqrt{a + \alpha x^2 - hx^4} + \sqrt{b + \beta y^2 - hy^4} + \sqrt{c + \gamma z^2 - hz^4} = 0.$$

La question s'achève immédiatement. (Juillet 1903.)

**ÉPREUVE ÉCRITE : CINÉMATIQUE.** — *Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. On étudiera seulement les questions suivantes : composantes de la vitesse d'un point du solide; mouvement continu du solide; composantes de l'accélération d'un point du solide.*

**DYNAMIQUE.** — *Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. On étudiera seulement les questions suivantes : réduction des forces d'inertie du solide; réactions du solide sur ses appuis; propriétés mécaniques des axes principaux d'inertie.*

**PROBLÈME.** — *Un point matériel M, de masse 1, se meut sans frottement dans un plan, attiré proportionnellement à la distance par deux points de ce plan, l'un O fixe, l'autre S tournant uniformément autour de O. On demande la trajectoire de M par rapport à la droite mobile OS.*

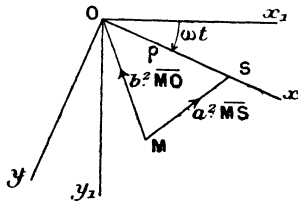
**SOLUTION.**

Les équations du mouvement relatif de M sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x - 2\omega \frac{dy}{dt} = -a^2 x - b^2(x-l),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \omega^2 y + 2\omega \frac{dx}{dt} = -a^2 y - b^2 y.$$

Posons  $x = \frac{b^2 l}{a^2 + b^2 - \omega^2} + X$ ;  $y = Y$  (nouvelle origine sur OS).



On obtient les deux intégrales premières

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + (a^2 + b^2 - \omega^2)(X^2 + Y^2) = h,$$

$$Y \frac{dX}{dt} - X \frac{dY}{dt} - \omega(X^2 + Y^2) = k.$$

L'élimination du temps donne en coordonnées polaires l'équation de la trajectoire

$$\varphi = \int \frac{(k - \omega \rho^2) d\rho}{\rho \sqrt{[(\omega^2 - a^2 - b^2)\rho^4 + (\omega + h)\rho^2 - k](k - \omega \rho^2)}}.$$

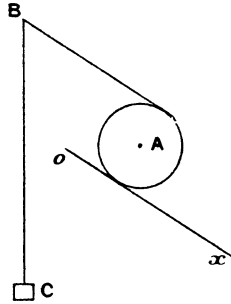
Si l'on pose  $\rho^2 = u$ , on est ramené à une quadrature elliptique. Il reste à faire la discussion. (Novembre 1903.)

**Marseille.**

**ÉPREUVE ÉCRITE.** — Dans un plan vertical, sur une droite Ox dépolie, inclinée d'un angle  $\alpha$  sur l'horizon, *Ann. de Mathémat.*, 4<sup>e</sup> série, t. IV. (Mai 1904.) 15



est placée une poulie A homogène et de poids P, sur laquelle est enroulé un fil qui se déroule parallèlement à Ox, passe ensuite sur une poulie très petite B, puis pend



verticalement et porte à son extrémité C un poids Q.

Étudier le mouvement de ce système et dire :

- 1° A quelle condition il y aurait équilibre;
- 2° A quelle condition le point C serait seul en équilibre;
- 3° A quelle condition le centre de la poulie resterait fixe en A.

Étudier le cas particulier suivant :

$$P = Q, \quad \text{tang } \alpha = \frac{3}{4},$$

coefficient de frottement  $f = 1$ , vitesses initiales nulles.

#### SOLUTION.

Soient

- $x$  l'abscisse du centre A compté parallèlement à Ox;
- $\theta$  l'angle dont tourne le disque dans le sens des aiguilles d'une montre;
- $y$  la distance BC;
- T la tension du fil;
- N la composante normale de l'action de Ox sur la poulie;
- S la composante tangentielle;
- M la masse du disque;
- $m$  la masse du point C.

La force N est égale à  $Mg \cos \alpha$ , et la force S est infé-

rieure à  $Mgf \cos \alpha$  s'il n'y a pas glissement, et elle est égale à  $Mgf \cos \alpha$  s'il y a glissement. Dans ce dernier cas, elle est en sens contraire de la vitesse du point de contact du disque et de  $Ox$ . Cette vitesse comptée suivant  $Ox$  est

$$\frac{dx}{dt} - R \frac{d\theta}{dt}.$$

Si l'on compte  $S$  dans le sens  $Ox$ , on a dans le cas du glissement

$$S = \pm Mgf \cos \alpha$$

et dans le cas où il n'y a pas glissement

$$|S| < Mgf \cos \alpha.$$

Si  $\alpha$  désigne la longueur non enroulée du fil lorsque  $y$  et  $\theta$  sont nuls, on aura

$$(1) \quad x + y + R\theta = \alpha.$$

Les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= Mg \sin \alpha + S - T, \\ MR \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -2(S + T), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= mg - T. \end{aligned}$$

A ces équations on adjoindra, s'il y a glissement, l'équation

$$S = \pm Mgf \cos \alpha,$$

et l'on prendra, pour commencer, le signe  $-$  ou le signe  $+$  selon que  $\frac{dx}{dt} - R \frac{d\theta}{dt}$  sera positif ou négatif.

On y adjoindra, au contraire, l'équation

$$\frac{dx}{dt} - R \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

s'il y a roulement, et il faut que

$$|S| < Mgf \cos \alpha.$$

Examinons d'abord les questions posées :

1° *Conditions de l'équilibre.* — Dans ce cas  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  sont nuls; on a donc

$$Mg \sin \alpha + S - T = 0,$$

$$S + T = 0,$$

$$mg - T = 0.$$

On en tire

$$T = mg, \quad S = -mg, \quad 2S = -Mg \sin \alpha.$$

De plus, puisqu'il n'y a pas glissement, il faut

$$|S| < Mgf \cos \alpha.$$

On a donc comme condition

$$Mg \sin \alpha = 2mg, \quad \tan \alpha < \frac{1}{2}f.$$

L'équilibre a donc lieu si la composante, parallèle au plan incliné, du poids de la poulie est égale au double du poids  $Q$ , et si la tangente de l'angle  $\alpha$  est inférieure à la moitié du coefficient de frottement.

2° *Le point C peut-il être immobile?* — Dans ce cas  $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ , et le point E glisse nécessairement sur  $Ox$ , car l'on a, par la relation (1),

$$\frac{dx}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

de sorte que la vitesse du point E est  $2 \frac{dx}{dt}$  et elle ne pourrait être nulle que si tout le système était en équilibre. Si l'on suppose  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 > 0$ , les équations du mouvement seront

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = Mg \sin \alpha - Mgf \cos \alpha - T,$$

$$MR \frac{d^2\theta}{dt^2} = 2(Mgf \cos \alpha - T),$$

$$0 = mg - T,$$

et, puisque  $\frac{dx}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} = 0$ , on tire de là :

$$0 = M g \sin \alpha + M g f \cos \alpha - 3 m g$$

ou

$$3 m g = M g (\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Telle est la relation qui doit exister entre les poids de la poulie et du point C pour que le point C soit immobile pendant que la poulie descend; on verrait facilement qu'elle descendra indéfiniment d'un mouvement uniformément accéléré si l'on a

$$M g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - m g > 0.$$

Dans le cas contraire, la vitesse ira en diminuant, puis elle deviendra nulle. A partir de cet instant, les équations du mouvement devront être changées, et l'équilibre du point C cessera d'exister. Car alors, ou bien la vitesse du point E continuera à être nulle, le disque roulera et entraînera nécessairement le point C, ou bien la vitesse du point E sera négative, il faudra changer le sens de S, et la relation

$$3 m g = M g (\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

doit être changée.

3<sup>e</sup> Condition pour que le centre de la poulie soit fixe. — Si l'on suppose que, primitivement, le point C descende, la vitesse est positive,  $S = - M g f \cos \alpha$ , et les équations du mouvement sont

$$0 = M g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - T,$$

$$M R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2 (M g f \cos \alpha - T),$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = m g - T.$$

On a d'ailleurs, puisque  $x$  est constant,

$$\frac{dx}{dt} + R \frac{d\theta}{dt} = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0.$$

On a donc

$$\frac{2}{M} (Mgf \cos \alpha - T) + g - \frac{1}{m} T = 0$$

et, par suite,

$$g(1 + 2f \cos \alpha) - \left( \frac{2}{M} + \frac{1}{m} \right) Mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 0$$

ou

$$\frac{1 + 2f \cos \alpha}{\sin \alpha - f \cos \alpha} = \frac{M + 2m}{m}$$

ou encore

$$\frac{M}{m} = \frac{1 - 2 \sin \alpha + 4f \cos \alpha}{\sin \alpha - f \cos \alpha},$$

ce qui exige d'ailleurs que  $\sin \alpha - f \cos \alpha > 0$ , c'est-à-dire

$$\tan \alpha > f.$$

Ces conditions étant réalisées, le centre de la poulie resterait fixe au moins pendant un certain temps. Mais il pourrait arriver que cet état ne persiste pas, car si  $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$  est négatif,  $\frac{d\theta}{dt}$  finira par être nul et ensuite négatif, et les équations ne conviendront plus

*Mouvement dans le cas où  $f = 1$ ,  $P = Q$ ,  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ; vitesses initiales nulles.* — On a alors

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = Mg \sin \alpha + S - T,$$

$$MR \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -2(S + T),$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = Mg - T.$$

Les vitesses initiales étant nulles, on ne sait pas si E glissera; supposons qu'il glisse vers le bas; alors S sera égal à

$$- Mgf \cos \alpha$$

et, puisque  $f = 1$ , on aura

$$S = - Mgf \cos \alpha.$$

On aura donc

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = M g \sin \alpha - M g \cos \alpha - T,$$

$$MR \frac{d^2 \theta}{dt^2} = + 2(M g \cos \alpha - T),$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = M g - T.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0,$$

et l'on suppose que E glisse vers le bas, c'est-à-dire

$$\frac{dx}{dt} - R \frac{d\theta}{dt} > 0.$$

Additionnant les trois équations on a

$$0 = M g (\sin \alpha + \cos \alpha + 1) - 4 T.$$

On aura par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= g \left( \sin \alpha - \cos \alpha - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} g (3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= 2 g \left( \cos \alpha - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} g (3 \cos \alpha - \sin \alpha - 1); \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{4} g (5 \sin \alpha - 11 \cos \alpha + 1).$$

Or  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ , on a donc

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{4} g \left( 3 - \frac{44}{5} + 1 \right) = -1, 2.$$

Donc

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - R \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

est négatif, et par conséquent

$$\frac{dx}{dt} - R \frac{d\theta}{dt},$$

qui, dans l'instant initial, est nul, sera négatif dans l'instant suivant, contrairement à l'hypothèse.

On verrait de même qu'on ne peut pas supposer

$$\frac{dx}{dt} - R \frac{d\theta}{dt}$$

négatif.

La seule hypothèse est donc de supposer qu'il y a roulement et que

$$\frac{dx}{dt} - R \frac{d\theta}{dt}$$

reste nul.

Dans ce cas, les équations du mouvement seront

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = M g \sin \alpha + S - T,$$

$$MR \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -2(S + T),$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = M g - T,$$

et il faudra vérifier  $|S| < M g f \cos \alpha$ , c'est-à-dire  $|S| < M g \cos \alpha$ .

On a, outre les trois équations précédentes, les deux suivantes :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + R \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = R \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

qui donnent donc

$$M g \sin \alpha + S - T - 2(S + T) + M g - T = 0$$

$$M g \sin \alpha + S - T + 2(S + T) = 0$$

c'est-à-dire

$$M g (1 + \sin \alpha) = S + 4T,$$

$$- M g \sin \alpha = 3S + T$$

d'où

$$11S = - M g (1 + 5 \sin \alpha).$$

( 233 )

Comme  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ , on a donc

$$11S = -4Mg, \quad S = -\frac{4}{11}Mg,$$

et l'on a

$$\frac{4}{11}Mg < Mg \cos \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\frac{4}{11}Mg < \frac{4}{5}Mg \quad \text{soit} \quad 20 < 44.$$

Il y a donc bien roulement. On a

$$S = -\frac{4}{11}Mg,$$

$$T = -Mg \sin \alpha - 3S = \left( \frac{12}{11} - \frac{3}{5} \right) Mg = \frac{27}{55} Mg.$$

On aura par conséquent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \left( \frac{3}{5} - \frac{4}{11} - \frac{27}{55} \right) = -\frac{14}{55}g,$$

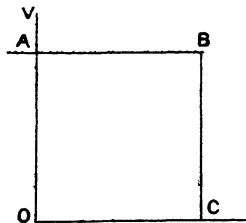
$$R \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{14}{55}g,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{28}{55}g.$$

Donc le disque A monte en roulant d'un mouvement uniformément accéléré.

Le cas général se ferait facilement en calquant le raisonnement sur le cas précédent.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une poutre AB, encastrée en A dans



un mur vertical, repose par son extrémité B sur un support BC. Sa longueur est de 5<sup>m</sup>, sa section est un carré



de 0<sup>m</sup>,20 de côté, et elle supporte une charge uniformément répartie de 200<sup>kg</sup> par mètre courant, calculer la réaction N exercée en B par le support :

1° Lorsque, ce support étant supposé incompressible, l'extrémité B reste à la même hauteur que A;

2° Lorsque, BC étant supposé compressible, le point B peut s'abaisser d'une petite quantité  $BB' = \varepsilon$ .

Calculer, dans ce cas, la réaction N' et l'abaissement  $\varepsilon$  en admettant que le support BC est constitué par une poutre de même nature et de mêmes dimensions que la poutre AB.

On adoptera pour le coefficient E la valeur  $0,6 \times 10^9$ .

## SOLUTION.

On trouve  
et sensiblement

$$N = 375^{\text{kg}}$$

$$N' = N.$$

On a

$$\varepsilon = 0^{\text{mm}}, 078. \quad (\text{Juillet } 1903.)$$