

GEORGES REMOUNDOZ

**Sur une extension de la notion du
rapport anharmonique et les équations
différentielles du premier ordre**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 208-211

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_208_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K 7 a]

SUR UNE EXTENSION DE LA NOTION DU RAPPORT ANHARMONIQUE ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE;

PAR M. GEORGES REMOUNDOZ.

1. On sait que l'on appelle *rapport anharmonique* de quatre quantités y_1, y_2, y_3, y_4 une expression telle que

$$\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)}.$$

On se rappelle qu'il y a en général six tels rapports distincts, dont trois sont les inverses des trois autres.

Dans l'hypothèse où y_1, y_2, y_3, y_4 désignent quatre intégrales particulières d'une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

$P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant des polynomes en x et y , la considération du rapport anharmonique combinée avec le théorème classique de M. Picard sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel isolé (voir *Traité d'Analyse*, t. III, p. 347) nous con-

duit à la conclusion qu'il n'y a pas plus de trois transcendentes uniformes distinctes satisfaisant à l'équation (1) (1).

2. Je me suis proposé d'appliquer l'extension récente (2) aux fonctions multiformes du théorème de M. Picard pour trouver une limite supérieure du nombre des transcendentes distinctes à r branches satisfaisant à l'équation (1), et à cette occasion j'ai recherché s'il est possible d'étendre au cas de $2n$ quantités (n un entier quelconque) la notion du rapport anharmonique.

Posons-nous le problème suivant :

Étant données $2n$ quantités $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{2n}$, former tous les produits de la forme suivante :

$$(2) \quad (y_{k_1} - y_{\mu_1})(y_{k_2} - y_{\mu_2}) \dots (y_{k_n} - y_{\mu_n}),$$

où k_1, k_2, \dots, k_n et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ désignent deux combinaisons des $2n$ objets $1, 2, 3, \dots, 2n$, pris n à n , n'ayant aucun objet commun, sans répétitions et telles qu'on ait

$$(3) \quad \mu_1 < k_1, \quad \mu_2 < k_2, \quad \mu_i < k_i, \quad \mu_n < k_n.$$

A chaque combinaison k_1, k_2, \dots, k_n correspond un

(1) A ce sujet, voir M. PETROWITCH, *Thèse pour le doctorat des Sciences mathématiques*, 1894; ou bien le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. III, p. 356.

(2) Une nouvelle généralisation du théorème de M. Picard sur les fonctions entières (*Comptes rendus*, 20 avril 1903); voir aussi E. MAILLET, *Sur les fonctions monodromes ou à r branches* (*Comptes rendus*, 11 mai 1903). Récemment, nous avons pu établir l'extension dans le cas le plus général. Voir : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendentes* (*Bulletin de la Société mathématique*).

nombre de combinaisons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ égal au produit

$$(k_1 - 1)(k_2 - 3)(k_3 - 5) \dots (k_n - 2n + 1),$$

si l'on suppose que $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n$.

En effet, l'indice λ_i peut prendre toutes les valeurs inférieures à k_i sauf k_1, k_2, \dots, k_{i-1} et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}$.

Ainsi le nombre total m de tous les produits de la forme (2) est donné par la formule

$$(4) \quad m = \sum (k_1 - 1)(k_2 - 3)(k_3 - 5) \dots (k_n - 2n + 1),$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons possibles de $1, 2, 3, \dots, 2n$, pris n à n sans répétitions, pour lesquelles on a

$$k_1 > 1, \quad k_2 > 3, \quad \dots, \quad k_n > 2n - 1$$

($k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_n$), puisqu'il est facile de voir que tous les produits ainsi obtenus sont distincts grâce aux inégalités (3), qui, n'étant pas essentielles, n'ont été supposées que pour cela.

En envisageant les rapports (quotients) de ces produits deux à deux, nous avons l'extension la plus naturelle de la notion du rapport anharmonique. En appliquant la formule (4) au cas ordinaire de $n = 2$, nous trouvons trois produits de la forme (2), avec lesquels nous formons six rapports distincts, qui sont en valeur absolue (au signe près) égaux aux rapports anharmoniques usuels.

3. Dans le cas où les quantités y désignent $2n$ intégrales particulières de l'équation différentielle (1), ces rapports $R(y_1, y_2, \dots, y_{2n})$ se caractérisent par le fait que leurs infinis et leurs zéros coïncident avec les zéros des diverses différences $y_i - y_j$ et par suite leur nombre

est fini (voir la Thèse précitée de M. Pétrowitch et l'Analyse de M. Picard, *loc. cit.*). Cela tient à ce que, grâce à leur conformation, ces rapports sont finis et différents de zéro pour tous les infinis d'une quelconque de ces intégrales.

La question suivante se pose maintenant :

Étudier les relations qui existent entre ces différents rapports (que l'on pourrait appeler hyperanharmoniques dans le cas de $n > 2$) et constater si elles permettent en général de résoudre le problème que je me suis proposé à l'égard des transcendentes multiformes satisfaisant à l'équation (1).
