NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BRICARD

Sur une propriété des cubiques planes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 114-117

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__114_0>

[F8g]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CUBIQUES PLANES;

PAR M. R. BRICARD.

1. Je rappellerai tout d'abord les propriétés suivantes :

Étant donnée une cubique plane C, sans point double, les coordonnées d'un point variable m de cette cubique peuvent être exprimées en fonctions elliptiques d'un argument u. Cette représentation peut être faite de telle manière que la relation

$$\mu_1 + \mu_1 + \mu_3 = \text{période},$$

entre trois valeurs μ_1, μ_2, μ_3, de l'argument exprime que les trois points correspondants m_1, m_2, m_3 sont en ligne droite.

Deux points de C, m et m', dont les arguments μ et μ' diffèrent d'une demi-période, sont dits en *correspondance steinérienne*. Comme il y a trois demi-périodes distinctes,

$$\omega_1, \qquad \omega_2, \qquad \omega_3 = -\omega_1 - \omega_2,$$

la correspondance steinérienne peut être établie de trois manières différentes. Pour fixer les idées, je considérerai dans ce qui suit celle que l'on obtient en choisissant la demi-période ω_1. (Il va sans dire que les deux autres jouissent des mêmes propriétés.)

Les tangentes à C, *aux deux points m et m', vont concourir en un point de cette courbe.*

La démonstration de ce fait est immédiate : soient p et p' les points où les tangentes à C en m et m', respectivement, vont de nouveau rencontrer la courbe, ϖ et ϖ' leurs arguments. On a

$$\varpi + 2\mu = 0, \qquad \varpi' + 2(\mu + \omega_1) = 0,$$

d'où

$$\varpi = \varpi' + 2\omega_1,$$

ce qui montre bien que les points p et p' coïncident.

2. Ayant rappelé ces faits classiques, je me propose d'établir la proposition suivante :

Soient a et a', m et m', deux couples de points en correspondance steinérienne sur C, *le premier fixe, l'autre mobile. On peut, de trois manières, trouver deux points fixes, p et q tels que les six points a, a', m, m', p, q soient constamment sur une conique.*

Soient α, $\alpha + \omega_1$, μ, $\mu' = \mu + \omega_1$ les arguments respectifs des points a, a', m, m'. Considérons sur C les points n et n' (en correspondance steinérienne) dont les arguments sont respectivement

$$\nu = -\alpha - \mu - \frac{\omega_1}{2}, \qquad \nu' = \nu + \omega_1 = -\alpha - \mu + \frac{\omega_1}{2}.$$

La somme des arguments des points a, a', m, m', n, n' étant égale à $2\omega_1$, il en résulte que ces six points appartiennent à une conique Γ.

Je dis en outre que, *par un point de* C *autre que a ou a', passe une seule conique* Γ. Il suffit, pour le faire voir, de montrer que les quatre points m, m', n, n' sont *en involution* sur C, c'est-à-dire jouent tous le même rôle sur cette courbe. Le fait est évident, si l'on écrit ainsi qu'il suit les relations qui existent entre les arguments de ces points :

$$\mu' = \mu + \omega_1,$$
$$\nu' = \nu + \omega_1,$$
$$(\mu + \mu') + (\nu + \nu') = -2\alpha - \omega_1 + \text{période}.$$

Les coniques Γ, qui passent déjà par deux points fixes a et a', sont ainsi telles que par un point de C il ne passe qu'une seule de ces coniques. Ces coniques appartiennent donc à un *faisceau linéaire,* c'est-à-dire qu'elles passent par deux points fixes p et q, en plus des points a et a' C. Q. F. D.

3. Si les points n et n' ont des arguments définis par l'un des systèmes de formules,

$$\nu = -\alpha - \mu - \frac{\omega_1}{2} + \omega_2, \qquad \nu' = \nu + \omega_1,$$
$$\nu = -\alpha - \mu - \frac{\omega_1}{2} + \omega_3, \qquad \nu' = \nu + \omega_1,$$

on peut répéter sans modifications le raisonnement qui précède, et l'on met en évidence les deux autres faisceaux de coniques dont l'existence avait été avancée.

4. On sait que le lieu des foyers des coniques faisant partie d'un faisceau tangentiel est une cubique *focale,* c'est-à-dire passant par les points cycliques et telle que ces points soient en correspondance steinérienne sur la cubique. Les deux foyers réels de l'une quelconque des coniques du faisceau (et aussi les deux foyers imaginaires) sont aussi en correspondance steinérienne sur la courbe. On conclut donc du théorème démontré plus haut l'énoncé suivant :

Si f, f' sont les foyers de l'une quelconque des coniques d'un faisceau tangentiel, on peut trouver de *trois manières différentes deux points fixes p et q, tels que les quatre points p, q, f, f' soient constamment sur un cercle.*

Ce dernier théorème a été énoncé dans ce Journal par E. Duporcq, sous forme de la question **1946** (1902, p. 575). L'auteur n'y signalait toutefois que l'existence de deux des couples des points p et q.