FÉLIX GODEY

Sur une propriété des lignes de courbure des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 441-444

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__441_0>

[O5h]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES LIGNES DE COURBURE DES SURFACES;

PAR M. FÉLIX GODEY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Sous ce titre, M. Bricard a établi récemment, par la voie géométrique, un théorème relatif aux plans osculateurs des lignes de courbure d'une surface quelconque (*voir* l'énoncé dans le numéro d'août des *N. A.*, p. 360). Suivant le désir exprimé par la Rédaction, je vais donner une démonstration analytique du même théorème.

Je suppose la surface S rapportée à ses lignes de courbure

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.};$$

nous avons donc par hypothèse :

1°

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \equiv 0;$$

2° x, y, z vérifient l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = A(u, v)\frac{\partial \theta}{\partial u} + B(u, v)\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Ceci posé le plan osculateur aux courbes $v = \text{const.}$ aux différents points d'une même courbe $u = \text{const.}$ aura pour équation

$$(X - x)(y'_u z''_{u^2} - z'_u y''_{u^2}) + (Y - y)(z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2}) \\ + (Z - z)(x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2}) = 0.$$

Ce plan contient un paramètre variable v; il enveloppe donc une développable et, pour avoir la génératrice T correspondant au point m, il faut simplement chercher la caractéristique de ce plan; en dérivant par rapport à v l'équation ci-dessus on a

$$(X - x)(y''_{uv} z''_{u^2} + y'_u z'''_{u^2 v} - z''_{uv} y''_{u^2} - z'_u y'''_{u^2 v}) + \ldots = 0.$$

Par suite, les cosinus directeurs de l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire les cosinus directeurs de la génératrice T, seront proportionnels à

$$\begin{aligned} a = {} & (z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2})(x''_{uv} y''_{u^2} + x'_u y'''_{u^2 v} - y''_{uv} x''_{u^2} - y'_u x'''_{u^2 v}) \\ & - (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2})(z''_{uv} x''_{u^2} + z'_u x'''_{u^2 v} - x''_{uv} z''_{u^2} - x'_u z'''_{u^2 v}), \\ b = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais de la relation

$$\theta''_{uv} = A\theta'_u + B\theta'_v$$

on déduit, en dérivant par rapport à u,

$$\theta'''_{u^2 v} = A\theta''_{u^2} + AB\theta'_u + B^2\theta'_v + A'_u\theta'_u + B'_u\theta'_v;$$

d'où, en remplaçant x''_{uv}, y''_{uv}, z''_{uv}, $x'''_{u^2 v}$, $y'''_{u^2 v}$, $z'''_{u^2 v}$ par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} a = (B'_u + B)\,[& (z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2})(x'_u y'_v - y'_u x'_v) \\ & - (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2})(z'_u x'_v - x'_u z'_v)] \\ + B\,[& (z'_u x''_{u^2} - x'_u z''_{u^2})(x'_v y''_{u^2} - y'_v x''_{u^2}) \\ & - (x'_u y''_{u^2} - y'_u x''_{u^2})(z'_v x''_{u^2} - x'_v z''_{u^2})]. \end{aligned}$$

Développant et simplifiant, on obtient par un calcul régulier

$$a = [B x''_{u^2} - (B^2 + B'_u) x'_u] \times D,$$

où

$$D = \begin{vmatrix} x''_{u^2} & x'_u & x'_v \\ y''_{u^2} & y'_u & y'_v \\ z''_{u^2} & z'_u & z'_v \end{vmatrix};$$

et, par permutation circulaire,

$$b = [By''_{u^2} - (B^2 + B'_u)y'_u] \times D,$$
$$c = [Bz''_{u^2} - (B^2 + B'_u)z'_u] \times D.$$

Nous aurons de même, pour quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la génératrice T′,

$$a' = Ax''_{v^2} - (A^2 + A'_v)x'_v,$$
$$b' = Ay''_{v^2} - (A^2 + A'_v)y'_v,$$
$$c' = Az''_{v^2} - (A^2 + A'_v)z'_v.$$

Il suffit donc de démontrer l'identité

$$\Sigma[Bx''_{u^2} - (B^2 + B'_u)x'_u][Ax''_{v^2} - (A^2 + A'_v)x'_v] = 0;$$

c'est-à-dire, en tenant compte de

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = 0,$$

l'identité

$$\Omega = AB\Sigma(x''_{u^2}x''_{v^2}) - A(B^2 + B'_u)\Sigma(x'_u x''_{v^2})$$
$$- B(A^2 + A'_v)\Sigma(x'_v x''_{u^2}) = 0.$$

Nous allons déduire de la relation

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = 0,$$

les valeurs de $\Sigma x''_{u^2}x''_{v^2}$; $\Sigma x'_u x''_{v^2}$; $\Sigma x'_v x''_{u^2}$; pour cela dérivons cette égalité par rapport à u, on obtient

$$\Sigma x'_v x''_{u^2} = -AE,$$

où $E = \Sigma x'_{u^2}$.

On a de même, en dérivant par rapport à v,

$$\Sigma x'_u x''_{v^2} = -BG,$$

où $G = \Sigma x'_{v^2}$.

Dérivons encore par rapport à v la première des deux équations ci-dessus, on a

$$\Sigma x''_{v^2}x''_{u^2} + \Sigma x'_v x'''_{u^2 v} = -A'_v E - AE'_v,$$

d'où, tout calcul régulier fait, en remplaçant x'''_{u^2v} par sa valeur obtenue précédemment,

$$\Sigma x''_{v^2} x''_{u^2} = -(B^2 + B'_u)G - A^2 E - A'_v E.$$

Remplaçons enfin, dans Ω, les trois Σ par les valeurs qui viennent d'être obtenues, il vient :

$$\begin{aligned}\Omega = & - AB[(B^2 + B'_u)G + (A^2 + A'_v)E] \\ & + A(B^2 + B'_u)BG + B(A^2 + A'_v)AE = 0.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Note de la Rédaction. — Nous avons reçu également de M. Jamet une démonstration analytique à peu près identique à la précédente, et de M. Genty une démonstration fondée sur l'emploi du calcul vectoriel.