Nouvelles annales de mathématiques

Henri Piccioli

Sur les asymptotiques des surfaces pseudosphériques de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 433-435

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__433_0>

[O5j] [O6g]

SUR LES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES PSEUDOSPHÉRIQUES DE RÉVOLUTION;

PAR M. HENRI PICCIOLI.

Dans une Note insérée dans ce Journal (¹), partant des formules qui lient les moments des directions principales d'une courbe gauche par rapport à une droite fixe, j'en ai déduit le théorème que voici :

Toute courbe dont les normales principales rencontrent une droite fixe jouit de la propriété que le moment de ses tangentes par rapport à cette droite est constant.

Ce théorème est applicable aux géodésiques des surfaces de révolution et l'on peut aisément reconnaître que ce n'est autre chose que le théorème de Clairaut. En effet, si nous calculons le produit du rayon d'un parallèle au point de rencontre de celui-ci avec la géodésique, par le sinus de l'angle sous lequel la géodésique coupe le méridien, nous trouverons pour résultat M_1.

(¹) *Voir* 4ᵉ série, t. II, 1902, p. 177.
Je profite de l'occasion pour faire remarquer que les résultats obtenus par M. Duporcq dans la remarque qui fait suite à ma Note (p. 181) avaient été déjà trouvés par M. Pirondini : ***Rettifica di un teorema e dimostrazione di alcuni teoremi geometrici*** (***Giornale di Matematiche,*** t. XXVIII, 1885, Napoli).

Écrivons les formules qui lient les moments

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dM_1}{dl} &= \frac{M_2}{\rho},\\ \frac{dM_2}{ds} &= -\frac{M_1}{\rho}-\frac{M_3}{\tau}+\cos\theta_3,\\ \frac{dM_3}{ds} &= \frac{M_2}{\tau}-\cos\theta_2, \end{aligned}\right.$$

et supposons qu'il s'agisse des asymptotiques d'une surface de révolution. Faisant M_3 nul dans la troisième des formules (1) on trouve

$$M_2 = \tau\cos\theta_2$$

ou bien

$$l_2 \operatorname{tang}\theta_2 = \tau.$$

Il s'ensuit pour la courbure totale de notre surface l'expression que voici :

$$K = -\frac{1}{(l_2 \operatorname{tang}\theta_2)^2}.$$

En particulier, si τ est une constante réelle (ce qui est le cas pour une surface pseudosphérique, comme on sait), on a l'énoncé suivant :

En tout point d'une ligne asymptotique d'une surface pseudosphérique de révolution, le produit de la plus courte distance entre la normale principale à cette ligne asymptotique, au point considéré, et l'axe de la surface, par la tangente trigonométrique de l'angle de ces directions, est égal au rayon de torsion τ de l'asymptotique.

L'élimination de M_1, M_2, M_3 des formules (1) nous conduit à la relation

$$\rho\cos\theta_3 = \text{const.},$$

c'est-à-dire :

Le long d'une asymptotique d'une surface pseudo-

sphérique de révolution, le produit de son rayon de première courbure par le cosinus de l'angle que sa binormale (normale à la surface) fait avec l'axe est constant.

Au moyen de cette propriété on pourrait calculer les équations intrinsèques des asymptotiques des trois types de surfaces pseudosphériques de révolution. Elles rentrent dans la classe de courbes définies par l'équation

$$2\rho \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} = c \qquad (c \text{ const.}),$$

le rayon T étant une constante. Cette équation se déduit des formules de Serret entre lesquelles on élimine les cosinus.