NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. LECHALAS

Un paradoxe du calcul des probabilités

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 343-348

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__343_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[J2a]

UN PARADOXE DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR M. G. LECHALAS.

Sous le titre qui précède, M. de Montessus a complété d'une façon fort intéressante, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de janvier 1903, ce que dit Joseph Bertrand du problème :

Quelle est la probabilité pour qu'une corde quelconque d'un cercle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?

Mais il n'a fait que poursuivre le développement mathématique indiqué par le célèbre professeur sans en faire la critique. Or il nous semble qu'il y a quelque chose à dire à ce point de vue.

C'est avec pleine raison que Joseph Bertrand a dit : « L'infini n'est pas un nombre; on ne doit pas, sans explication, l'introduire dans les raisonnements », et la raison en est que l'on peut dérouler, pour ainsi dire, l'infini d'une infinité de manières, conduisant aux résultats les plus variés.

Si, par exemple, je prends la suite naturelle des entiers et si, après l'avoir arrêtée à un nombre quelconque et avoir groupé d'une façon quelconque les entiers ainsi choisis, je marque l'un d'eux au hasard, il y aura toujours (1) une chance égale à $\frac{1}{2}$ pour que le

(1) Approximativement, bien entendu, si je me suis arrêté apres un nombre impair.

nombre marqué soit pair. Si, au contraire, je considère la suite illimitée des entiers et si je la suppose classée de telle sorte que deux groupes de deux nombres impairs soient constamment séparés par un seul nombre pair, la chance en question ne sera plus que de $\frac{1}{3}$, bien que les deux séries infinies comprennent identiquement les mêmes nombres.

Cet exemple suggère deux réflexions. La première confirme pleinement la remarque de Bertrand : du moment que l'infini s'introduit dans un problème de probabilité, celui-ci devient susceptible de multiples solutions, parce que son énoncé peut se préciser de multiples façons. Mais, en même temps, nous voyons, dans notre exemple, qu'il peut fort bien y avoir, parmi tous les énoncés complétés, un énoncé qui réponde seul réellement à la pensée de celui qui le pose sous sa forme générale.

Si pratiquement on ne peut réaliser la suite illimitée des entiers sur laquelle nous venons de raisonner, *on admet* qu'au contraire on peut opérer sur le continu, qui recèle l'infini dans ses flancs, et le problème posé par Bertrand sur les cordes plus grandes que le côté du triangle équilatéral va donner lieu aux mêmes distinctions et conduire aux mêmes conclusions.

De même que, dans le cas de la suite des entiers, nous disions que le problème véritable posé par l'énoncé général supposait ces nombres rangés selon leur ordre naturel, de même ici nous dirons qu'un point marqué au hasard sur une ligne a d'égales chances de tomber sur un quelconque des segments égaux de longueur quelconque dans lesquels aura été divisée cette ligne, qu'un point marqué au hasard sur une surface a des chances égales de tomber dans un quelconque des polygones égaux dans lesquels on aura décomposé cette surface. Semblablement, une droite tracée à partir d'un point a des chances égales de tomber dans l'un quelconque des angles égaux faisant le tour du cadran autour de ce point.

Telles sont bien du reste les hypothèses faites par Bertrand et par M. de Montessus; mais alors l'indétermination résultant de la continuité est levée, et les paradoxes qu'on fait ressortir doivent être purement apparents et s'évanouir devant un examen attentif des divers cas.

Pour montrer qu'il en est bien ainsi, nous choisirons d'abord deux méthodes de tracé de la droite dite *quelconque,* pour lesquelles la solution du paradoxe soit facile. Supposant d'abord donnée la direction de la corde, ce qui ne change rien à la probabilité, nous pouvons achever de la déterminer en prenant au hasard son point d'intersection, soit avec une droite, telle que le diamètre perpendiculaire, soit avec la circonférence même du cercle. Ce point ayant, dans chacun des cas, d'égales chances de tomber sur un segment quelconque du diamètre ou sur un arc quelconque du cercle, on voit immédiatement qu'on obtiendra des probabilités de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{3}$ comme réponses au problème.

Or ici le choix n'est pas difficile. Si, par exemple, nous avons partagé le diamètre et la demi-circonférence en 180 parties égales, nous aurons, d'une part, des parallèles équidistantes et, d'autre part, des parallèles d'autant plus serrées qu'elles sont plus éloignées du centre. Il est clair que, en déterminant la corde par un point pris au hasard sur le plan et non sur telle ou telle ligne, ce point aura, en vertu même des hypothèses de Bertrand, d'égales chances de tomber dans une quelconque des premières bandes, tandis qu'il en aura d'inégales de tomber dans les diverses bandes de l'autre division. Il en serait de même si l'on jetait au hasard sur le plan une droite de la direction voulue. Il n'est donc pas douteux que la seconde méthode proposée doive être écartée.

Si, au lieu de ne considérer qu'une direction, on considérait toute une série de parallèles faisant le tour du cadran et formant entre elles des angles successifs de 1°, on obtiendrait deux réseaux recouvrant le cercle, l'un homogène et l'autre à mailles plus serrées vers la circonférence que vers le centre. Le premier seul peut mesurer la probabilité de chute fortuite d'une droite dans une région ou dans l'autre. Nous pouvons dès maintenant affirmer que $\frac{1}{2}$ est la probabilité pour qu'une corde dépasse le côté du triangle équilatéral, et qu'on devra trouver cette mesure toutes les fois qu'on adoptera un mode de tracé conduisant à un réseau homogène. Il nous reste à confirmer cette affirmation.

Voici un cas qui nous a fort embarrassé avant que nous n'eussions reconnu le principe des réseaux homogènes : c'est le second de Bertrand. On mène une corde quelconque d'un point pris sur la circonférence. Comme le dit justement Bertrand, le choix du point n'importe pas.

« Si l'on trace, continue-t-il, les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°. La corde, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent également la recevoir la dirige dans celui-là semble, par définition, égale à $\frac{1}{3}$ (1). »

(1) *Calcul des probabilités*, p. 5.

Au point de vue où nous nous sommes placé, nous ne dirons pas qu'elle *semble,* mais qu'elle *est.*

Rapproché de celui du premier cas, ce résultat surprend, car le fait de passer par un point d'une circonférence est essentiel à toute corde, et le choix du point est incontestablement sans influence sur la probabilité. D'autre part, on applique bien les règles du hasard au choix d'une corde passant par ce point. Mais cherchons à quel réseau répond cette construction, et pour cela répétons-la en prenant successivement toutes les extrémités d'arcs de 1° comptés successivement à partir du point primitif. On obtient ainsi *identiquement* le même réseau que dans le cas des parallèles passant par des points équidistants sur la circonférence : c'est dire qu'il n'est pas homogène et doit conduire en effet au rapport $\frac{1}{3}$.

M. de Montessus (et la chose est très intéressante) a d'ailleurs étudié le problème dans le cas le plus général : une corde quelconque menée d'un point quelconque du plan. Il semble bien qu'il n'y ait là aucune détermination spéciale. Aussi trouve-t-il la probabilité $\frac{1}{2}$.

On se rend du reste aisément compte que la formule conduit à un réseau qui, à la limite, est homogène, car on a des points uniformément répartis sur tout le plan et servant de centres à autant de roses des vents. Cela ne donne pas l'homogénéité, il est vrai, entre tous les éléments du réseau; mais, au fur et à mesure que les points d'irradiation et que les rayons eux-mêmes se multiplient, le champ de l'hétérogénéité se réduit au delà de toute limite.

Ainsi donc l'infini et le continu troublent bien les problèmes de probabilité, mais beaucoup moins que ne le prétend Bertrand. En ce qui concerne particulièrement le continu, il suffit d'en poser l'homogénéité, comme le fait Bertrand lui-même, pour qu'aussitôt toute indétermination disparaisse.