NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 333-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__333_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1952.

(1902, p. 576.)

Trouver toutes les fractions rationnelles

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

jouissant de la propriété que, si on les développe suivant les puissances croissantes de x, les coefficients du développement soient égaux à zéro, à $+1$ ou à -1.

(LAGUERRE.)

SOLUTION

Par M. E. LANDAU.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que le dénominateur $f(x)$ ne disparaît pas pour $x = 0$; car si le développement de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ suivant les puissances croissantes de x renfermait des termes à exposants négatifs

$$(1)\quad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{a_0}{x^s} + \frac{a_1}{x^{s-1}} + \ldots + \frac{a_{s-1}}{x} + a_s + a_{s+1}x + \ldots,$$

on aurait

$$\frac{x^s \varphi(x)}{f(x)} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_s x^s + \ldots,$$

où les coefficients sont les mêmes que dans (1): on obtient donc toutes les fractions rationnelles satisfaisant aux conditions du problème en ne cherchant que celles où $f(0) \neq 0$ et en les divisant par une puissance quelconque x à exposant entier et $\geqq 0$.

On connaît bien l'exemple de la progression géométrique

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad (|x| < 1),$$

appartenant aux fonctions cherchées; on en déduit successivement ces autres fonctions qui ne sont guère plus générales :

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + \ldots,$$

k désignant un entier positif quelconque,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} &= \frac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k} \\ &= (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1})(1 + x^k + x^{2k} + \ldots) \\ &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + b_0 x^k + \ldots \\ &\qquad + b_{k-1}x^{2k-1} + b_0 x^{2k} + \ldots,\end{aligned}$$

où $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ désignent k nombres dont chacun égale soit zéro, soit $+1$, soit -1, enfin

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &= a_0 + a_1 x + \ldots \\ &\quad + a_{m-1}x^{m-1} + \frac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1}}{1 - x^k} x^m \\ &= a_0 + a_1 x + \ldots \\ &\quad + a_{m-1}x^{m-1} + b_0 x^m + b_1 x^{m+1} + \ldots \\ &\quad + b_{k-1}x^{m+k-1} + b_0 x^{m+k} + \ldots \\ &\quad + b_{k-1}x^{m+2k-1} + b_0 x^{m+2k} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

où m désigne un entier $\geqq 1$, k un entier $\geqq 1$, et $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$, $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ des nombres quelconques égaux à zéro, à $+1$ ou à -1.

Je dis maintenant que, inversement, toute série

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{f(x)} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\ &\qquad (a_n = 0, +1, -1), \end{aligned}\right.$$

si elle représente une fonction rationnelle, est contenue dans le type (2) et peut, par conséquent, être mise sous la forme

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = G(x) + H(x)\frac{x^m}{1 - x^k},$$

$G(x)$ et $H(x)$ désignant des polynomes de degrés $m-1$ et $k-1$ respectivement.

En effet, soient, dans (3), ρ le degré de $\varphi(x)$, r celui de $f(x)$; l'on sait que les coefficients a_n satisfont, pour tout nombre ν supérieur ou égal au plus grand τ des deux nombres 0 et $\rho - r + 1$, à une formule de récurrence

$$(4)\qquad a_{\nu+r} = \gamma_1 a_{\nu+r-1} + \gamma_2 a_{\nu+r-2} + \ldots + \gamma_r a_\nu,$$

où $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ sont des constantes. On en conclut que, par une succession de r coefficients $a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_{\nu+r-1}$, le coefficient suivant $a_{\nu+r}$ est complètement déterminé, quel que soit le rang ν où cette suite commence, ν étant $\geqq \tau$.

Je considère maintenant les $3^r + r$ nombres

$$a_\tau,\quad a_{\tau+1},\quad \ldots,\quad a_{\tau+3^r+r-1};$$

ils renferment 3^r+1 systèmes de r coefficients successifs

$$(5) \qquad a_\nu, \quad a_{\nu+1}, \quad \ldots, \quad a_{\nu+r-1},$$

savoir pour $\nu = \tau, \tau+1, \ldots, \tau+3^r$. Chaque a_r ne pouvant avoir, par hypothèse, que trois valeurs distinctes, un système de r coefficients ne peut être formé que du nombre fini de 3^r manières différentes; parmi les 3^r+1 systèmes (5), il faut donc qu'il y en ait au moins deux qui soient égaux terme à terme; il existe donc deux nombres m et k ($m \geqq \tau$, $k \geqq 1$) tels que

$$a_m = a_{m+k}, \quad a_{m+1} = a_{m+k+1}, \quad \ldots, \quad a_{m+r-1} = a_{m+k+r-1}.$$

En vertu de (4), on en déduit successivement

$$a_{m+r} = a_{m+k+r}, \quad a_{m+r+1} = a_{m+k+r+1}, \quad \ldots.$$

en un mot,

$$a_\lambda = a_\nu,$$

pour

$$\lambda \equiv \nu \pmod{k}, \quad \lambda \geqq m, \quad \nu \geqq m.$$

A partir de l'indice m, les coefficients se répètent donc périodiquement de k en k; en posant

$$a_m = b_0, \quad a_{m+1} = b_1, \quad \ldots, \quad a_{m+k-1} = b_{k-1},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = a_0 + a_1 x + \ldots & \\ + a_{m-1}x^{m-1} &+ b_0 x^m + b_1 x^{m+1} + \ldots \\ + b_{k-1}x^{m+k-1} &+ b_0 x^{m+k} + \ldots \\ + b_{k-1}x^{m+2k-1} &+ b_0 x^{m+2k} + \ldots,\end{aligned}$$

ce qui coïncide bien avec (2).

La solution générale du problème proposé est donc

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^s}\left(G(x) + H(x)\frac{x^m}{1-x^k}\right) \qquad (s \geqq 0, m \geqq 1, k \geqq 1),$$

où $G(x)$ et $H(x)$ désignent des polynomes de degrés $m-1$ et $k-1$ respectivement, dont les coefficients sont tous égaux à zéro, à $+1$ ou à -1.