PHILBERT DU PLESSIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1903. Composition de mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 314-322

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__314_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1903. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Deux points P, P_1, *rapportés à un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *ont pour coordonnées* a, b, c *et* a_1, b_1, c_1. *De ces points partent respectivement deux droites* [D] *et* [D_1] *ayant pour cosinus directeurs* α, β, γ *et* α_1, β_1, γ_1. *L'axe des z est vertical.*

Deux points pesants, placés d'abord en P *et* P_1, *sont abandonnés à eux-mêmes, au même instant, et descendent sur les droites* [D] *et* [D_1], *sur lesquelles ils occupent, au bout du temps* t, *les positions* M *et* M_1.

I. *Exprimer les coordonnées des points* M *et* M_1 *en fonction du temps.*

Les masses des deux points étant μ *et* μ_1, *déterminer le mouvement de leur centre de gravité* G.

En supposant $c_1 = c$, $\gamma_1 = \gamma$, *trouver à quelles conditions doivent satisfaire* α, α_1, β, β_1, *et quelle doit être la valeur du rapport* $\frac{\mu}{\mu_1}$ *pour que* G *décrive une droite verticale.*

II. *Ces dernières conditions étant remplies, former l'équation de la surface-lieu de la droite* MM_1, *quand le temps varie.*

Mettre en évidence les génératrices rectilignes de cette surface.

Calculer les coordonnées de son sommet.

III. *Le mètre étant pris pour unité de longueur, on* *suppose que l'on ait*

$$a = b = 0, \qquad c = 1, \qquad a_1 = 0, \qquad b_1 = 2, \qquad c_1 = 1,$$

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = 0, \qquad \alpha_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \beta_1 = 0, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas particulier, calculer le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$, *de telle sorte que* G *parcoure une droite verticale : calculer, en outre, sa vitesse* v *à l'instant où il vient rencontrer l'axe des* y, *ainsi que la durée* t *de sa chute jusqu'à cet instant. Ces valeurs seront calculées en secondes pour le temps, en mètres à la seconde pour la vitesse, en prenant* 9,8 *pour valeur de l'accélération due à la pesanteur.*

N. B. — *Il est bien entendu qu'on ne tient aucun compte du frottement, ni de la résistance de l'air dans le mouvement des points* M *et* M_1.

SOLUTION ANALYTIQUE.

I. On sait, d'après la théorie du plan incliné, que chacun des points M et M_1 décrit la droite correspondante d'un mouvement uniformément varié dont l'accélération est égale à la projection de l'accélération de la pesanteur sur cette droite.

Si donc on suppose l'axe Oz dirigé *du bas vers le haut*, l'accélération du point M sur la droite D est égale à $-g\gamma$, et ses projections sur les trois axes sont respectivement

$$-g\alpha\gamma, \quad -g\beta\gamma, \quad -g\gamma^2,$$

ce qui donne immédiatement, pour les coordonnées du point M au bout du temps t,

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a - \frac{1}{2} g\alpha\gamma t^2, \\ y = b - \frac{1}{2} g\beta\gamma t^2, \\ z = c - \frac{1}{2} g\gamma^2 t^2 \end{cases}$$

et, de même pour le point M_1,

$$(1') \qquad \begin{cases} x = a_1 - \frac{1}{2} g \alpha_1 \gamma_1 t^2, \\ y = b_1 - \frac{1}{2} g \beta_1 \gamma_1 t^2, \\ z = c_1 - \frac{1}{2} g \gamma_1^2 t^2. \end{cases}$$

Les coordonnées du centre de gravité G, égales, comme on sait, à

$$X = \frac{\mu x + \mu_1 x_1}{\mu + \mu_1}, \qquad Y = \frac{\mu y + \mu_1 y_1}{\mu + \mu_1}, \qquad Z = \frac{\mu z + \mu_1 z_1}{\mu + \mu_1},$$

sont donc données par

$$(2) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{\mu a + \mu_1 a_1}{\mu + \mu_1} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{\mu \alpha \gamma + \mu_1 \alpha_1 \gamma_1}{\mu + \mu_1} t^2, \\ Y = \dfrac{\mu b + \mu_1 b_1}{\mu + \mu_1} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{\mu \beta \gamma + \mu_1 \beta_1 \gamma_1}{\mu + \mu_1} t^2, \\ Z = \dfrac{\mu c + \mu_1 c_1}{\mu + \mu_1} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{\mu \gamma^2 + \mu_1 \gamma_1^2}{\mu + \mu_1} t^2, \end{cases}$$

équations de même forme que les précédentes, qui définissent par suite aussi un mouvement rectiligne uniformément varié.

La droite décrite par le point G sera, d'ailleurs, verticale si X et Y sont indépendants de t, c'est-à-dire si

$$\mu \alpha \gamma + \mu_1 \alpha_1 \gamma_1 = 0,$$
$$\mu \beta \gamma + \mu_1 \beta_1 \gamma_1 = 0.$$

Dans l'hypothèse où $\gamma = \gamma_1$, ces égalités peuvent s'écrire

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = -\frac{\mu_1}{\mu},$$

et, puisque les égalités

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

donnent ici

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2,$$

on a

$$-\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} = \pm 1.$$

Or, les masses μ et μ_1 étant essentiellement positives, la valeur -1 seule convient. On a donc finalement

$$(3) \qquad \alpha = -\alpha_1, \qquad \beta = -\beta_1, \qquad \mu = \mu_1.$$

En d'autres termes, les droites D et D_1 également inclinées sur Oxy le sont en sens contraire, leurs projections sur ce plan étant parallèles, et les masses des points M et M_1 sont égales.

Si, en outre, on tient compte de l'égalité $c = c_1$, on voit que les coordonnées du point G se réduisent alors à

$$X = \frac{a + a_1}{2}, \qquad Y = \frac{b + b_1}{2}, \qquad Z = c - \frac{1}{2} g\gamma^2 t^2.$$

II. Si, dans les équations de la droite MM_1

$$\frac{X - x}{x - x_1} = \frac{Y - y}{y - y_1} = \frac{Z - z}{z - z_1},$$

on remplace x, y, z, x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs (en tenant compte des hypothèses $c = c_1$, $\gamma = \gamma_1$), et si l'on pose $\frac{1}{2} g\gamma t^2 = \theta$, on a

$$\frac{X - a + \theta\alpha}{a - a_1 - 2\theta\alpha} = \frac{Y - b + \theta\beta}{b - b_1 - 2\theta\beta}, \qquad Z = c - \theta\gamma.$$

Éliminant θ entre ces équations, on a, pour la surface décrite par la droite MM_1, l'équation

$$\frac{\gamma(X - a) - \alpha(Z - c)}{\gamma(a - a_1) + 2\alpha(Z - c)} = \frac{\gamma(Y - b) - \beta(Z - c)}{\gamma(b - b_1) + 2\beta(Z - c)}$$

qu'on peut écrire

$$(4)\quad \begin{cases} 2(Z-c)\left[\beta\left(X-\dfrac{a+a_1}{2}\right)-\alpha\left(Y-\dfrac{b+b_1}{2}\right)\right] \\ \qquad +\gamma\left[(b-b_1)\left(X-\dfrac{a+a_1}{2}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left.-(a-a_1)\left(Y-\dfrac{b+b_1}{2}\right)\right]=0. \end{cases}$$

Cette équation définit un paraboloïde hyperbolique. On voit immédiatement qu'elle se simplifie beaucoup lorsqu'on transporte l'origine au point $\left(\dfrac{a+a_1}{2}, \dfrac{b+b_1}{2}, c\right)$, centre de gravité des points P et P_1. Elle devient alors

$$(4\ bis)\quad 2Z'(\beta X'-\alpha Y')+\gamma[(b-b_1)X'-(a-a_1)Y']=0.$$

Les plans directeurs de ce paraboloïde sont

$$Z'=0,\qquad \beta X'-\alpha Y'=0,$$

et ses deux systèmes de génératrices rectilignes

$$(\lambda)\quad \begin{cases} \beta X'-\alpha Y'=\lambda[(b-b_1)X'-(a-a_1)Y'], \\ 2\lambda Z'=-\gamma; \end{cases}$$

$$(\mu)\quad \begin{cases} 2Z'=\mu[(b-b_1)X'-(a-a_1)Y'], \\ \mu(\beta X'-\alpha Y')=-\gamma. \end{cases}$$

Les plans directeurs étant rectangulaires, le paraboloïde est équilatère, et son sommet est à la rencontre des deux génératrices respectivement perpendiculaires aux deux plans directeurs.

La génératrice (μ) perpendiculaire au plan $Z'=0$ est celle pour laquelle $\mu=\infty$, c'est-à-dire

$$(5)\qquad X'=0,\qquad Y'=0,$$

et la génératrice (λ) perpendiculaire au plan

$$\beta X'-\alpha Y'=0$$

est celle pour laquelle

$$[(b - b_1)\lambda - \beta]\beta + [(a - a_1)\lambda - \alpha]\alpha = 0;$$

d'où

$$\lambda = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta(b - b_1) + \alpha(a - a_1)},$$

ce qui, porté dans la seconde équation (λ), donne

$$Z' = -\frac{\gamma}{2}\,\frac{\alpha(a - a_1) + \beta(b - b_1)}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{6}$$

Le sommet étant défini, par rapport aux nouveaux axes, par les équations (5) et (6), ses coordonnées rapportées aux anciens seront

$$X = \frac{a + a_1}{2},$$

$$Y = \frac{b + b_1}{2},$$

$$Z = c - \frac{\gamma}{2}\,\frac{\alpha(a - a_1) + \beta(b - b_1)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

III. Avec les données de l'énoncé, les formules (3), où l'on remplace par ρ le rapport $\frac{\mu}{\mu_1}$, deviennent

$$X = -\frac{2\rho - \sqrt{3}}{8(\rho + 1)}gt^2, \qquad Y = \frac{2}{\rho + 1}, \qquad Z = 1 - \frac{2\rho + 1}{8(\rho + 1)}gt^2.$$

Pour que le point défini par ces coordonnées décrive une verticale, il faut et il suffit que X soit indépendant de t (Y l'étant déjà), ce qui donne

$$2\rho = \sqrt{3} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a, dès lors,

$$Z = 1 - \frac{\sqrt{3} + 1}{4(\sqrt{3} + 2)}gt^2.$$

Lorsque le point rencontre l'axe Oy, son Z est nul, et le temps de la chute est, dès lors, donné par

$$1 - \frac{\sqrt{3}+1}{4(\sqrt{3}+2)} \times 9,8\, t^2 = 0;$$

d'où

$$t = 2\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{9,8(1+\sqrt{3})}}$$

ou, en multipliant haut et bas sous le radical par $\sqrt{3}-1$,

$$t = \sqrt{\frac{2(1+\sqrt{3})}{9,8}} = 0^s,746.$$

Si nous représentons le mouvement vertical du point par l'équation

$$Z = 1 - \frac{g' t^2}{2}$$

$\left(\text{où } g' = \frac{\sqrt{3}+1}{2(\sqrt{3}+2)}\, g\right)$, nous venons de trouver, pour le temps de la chute,

$$t = \sqrt{\frac{2}{g'}}.$$

D'autre part, la vitesse est donnée en valeur absolue par

$$v = g' t.$$

On a donc, pour la vitesse à l'instant considéré,

$$v = g' \sqrt{\frac{2}{g'}} = \sqrt{2g'}$$

et, par suite,

$$vt = 2.$$

Donc

$$v = \frac{2}{t} = \frac{2}{0,746} = 2^m,678.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

I. Les segments parcourus dans le même temps par M et M_1 sur les droites D et D_1 à partir des points P et P_1 sont proportionnels aux projections de l'accélération g sur ces droites. Ces points engendrent donc des ponctuelles semblables, et la droite qui les joint décrit un paraboloïde hyperbolique. Comme, d'autre part, le centre de gravité G divise le segment MM_1 dans un rapport constant (inverse de celui des masses μ et μ_1), il décrit une génératrice Δ de ce paraboloïde, de même système que D et D_1, et, de plus, il engendre sur cette génératrice une ponctuelle semblable aux ponctuelles (M) et (M_1). Le mouvement de G est donc rectiligne et uniformément varié.

Si Δ est verticale, le plan directeur correspondant est vertical, et les droites D et D_1 étant alors parallèles à un même plan vertical ont leurs projections horizontales parallèles. Leurs inclinaisons supposées égales ($\gamma = \gamma_1$) doivent être de sens contraire, sans quoi le paraboloïde se réduirait au plan des deux droites parallèles qu'on obtiendrait alors, et Δ ne saurait être verticale tant que D et D_1 ne le seraient pas.

Sur ces droites inclinées, M et M_1 parcourent des segments égaux entre eux dans le même temps. Donc, la projection horizontale de MM_1 passe par un point fixe, milieu de la projection horizontale de PP_1, et le centre de gravité G ne peut décrire une verticale qu'autant qu'il se projette horizontalement en ce point fixe, ce qui exige que G soit au milieu de MM_1, c'est-à-dire que $\mu = \mu_1$.

II. Lorsque, en outre, $c = c_1$, c'est-à-dire lorsque les points de départ P et P_1 sont au même niveau, la droite MM_1 reste constamment horizontale et engendre, par suite, en s'appuyant sur D et D_1, un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est horizontal, l'autre étant parallèle à D et D_1, par suite vertical. Ce paraboloïde est donc équilatère.

Les génératrices du premier système, qui ne sont autres que les droites MM_1, rencontrent toutes, comme nous venons de le voir, la verticale Δ décrite par G.

Les génératrices du second système, parallèles au second plan directeur, rencontrent toutes la perpendiculaire commune π à D et D_1, qui est évidemment une génératrice du premier système, puisque horizontale.

Les génératrices Δ et π respectivement perpendiculaires aux deux plans directeurs déterminent un plan tangent perpendiculaire à l'axe, celui-ci étant parallèle à l'intersection des plans directeurs. Leur point de rencontre, milieu de la perpendiculaire commune à D et D_1, n'est donc autre que le sommet du paraboloïde.