Nouvelles annales de mathématiques

H. Padé

Sur l'herpolhodie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 289-297

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__289_0>

[R8aα]

SUR L'HERPOLHODIE;

PAR M. H. PADÉ.

1. Les deux équations qui définissent l'herpolhodie et le mouvement du pôle sur cette courbe, telles que les a données M. Darboux dans une Note de la *Mécanique* de Despeyrous, s'obtiennent aisément et au même point de vue, en ayant simplement égard à l'égalité de la vitesse absolue du pôle décrivant cette herpolhodie et de la vitesse relative du même point décrivant, dans le système invariable mobile autour du point fixe, la polhodie. Cette égalité résulte, d'ailleurs, immédiatement de ce que la vitesse d'entraînement est nulle.

2. Soient

O le point fixe;

Ox, Oy, Oz les axes de l'ellipsoïde d'inertie du système autour de ce point;

A, B, C les moments principaux d'inertie correspondants;

m la position du pôle à l'instant t; x, y, z ses coordonnées;

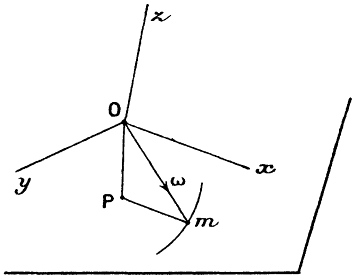
$O\omega$ la rotation instantanée à l'instant t; p, q, r ses projections sur Ox, Oy, Oz;

P le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan fixe tangent en m à l'ellipsoïde d'inertie.

3. Rapportons, dans son plan, l'herpolhodie au système de coordonnées polaires ρ, χ, défini par le pôle P et le sens positif de rotation autour de $\overline{OP}$.

La vitesse du point m décrivant l'herpolhodie a $\frac{d\rho}{dt}$ pour composante suivant $\overline{\mathrm{P}m}$ et $\rho^2\frac{d\chi}{dt}$ pour moment autour de $\overline{\mathrm{OP}}$.

D'un autre côté, la vitesse relative de m ayant pour



projections, sur $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$, les vecteurs $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et, par suite, pour moment résultant autour de O, le vecteur dont les projections sur les axes sont y

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt},\quad z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt},\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt},$$

on a les deux équations suivantes :

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt}=&\ \frac{dx}{dt}\cos(\overline{\mathrm{O}x},\overline{\mathrm{P}m})\\&+\frac{dy}{dt}\cos(\overline{\mathrm{O}y},\overline{\mathrm{P}m})+\frac{dz}{dt}\cos(\overline{\mathrm{O}z},\overline{\mathrm{P}m}),\\\rho^2\frac{d\chi}{dt}=&\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)\cos(\overline{\mathrm{O}x},\overline{\mathrm{OP}})\\&+\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\cos(\overline{\mathrm{O}y},\overline{\mathrm{OP}})\\&+\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\cos(\overline{\mathrm{O}z},\overline{\mathrm{OP}}).\end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les seconds membres en fonction, d'abord, de p, q, r; puis, ensuite, de ρ; c'est un calcul facile.

4. Nous avons à faire usage (*voir* APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II) des équations d'Euler

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B-C)qr, \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C-A)rp, \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A-B)pq. \end{cases}$$

Elles donnent immédiatement les deux intégrales premières

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = D\mu^2,$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = D^2\mu^2,$$

D et μ désignant deux constantes positives qui, en raison de l'interprétation géométrique, découverte par Poinsot, des premiers membres de ces deux intégrales, donnent lieu aux relations

$$\sqrt{D}\,\mu = \frac{O\omega}{Om}, \qquad \sqrt{D} = \frac{1}{OP};$$

$D\mu$ est la longueur de l'axe résultant, autour de O, des quantités de mouvement, axe qui a pour projections sur Ox, Oy, Oz les vecteurs Ap, Bq, Cr.

On a immédiatement

$$x = \overline{Om}\cos(\overline{Ox}, \overline{Om}) = \overline{Om}\,\frac{p}{\overline{O\omega}} = \frac{1}{\sqrt{D}\,\mu}p,$$

en sorte que

$$(1)\qquad x = \frac{1}{\sqrt{D}\,\mu}p, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{D}\,\mu}q, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{D}\,\mu}r;$$

comme, d'autre part,

$$Om^2 = OP^2 + Pm^2,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{D} + \rho^2,$$

on en conclut

$$p^2 + q^2 + r^2 = \mu^2 + D\mu^2\rho^2,$$

et l'on a ainsi ce second système d'équations

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{array}{l} p^2 + q^2 + r^2 = D\mu^2\rho^2, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = D\mu^2, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = D^2\mu^2. \end{array}\right.$$

Les équations (α) donnent $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ en fonction de p, q, r, et les équations (β) donnent p, q, r en fonction de ρ.

5. De (1) et (α) on déduit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{D}\mu}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\sqrt{D}\mu}\frac{B-C}{A}qr,$$

en sorte que

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{D}\mu}\dfrac{B-C}{A}qr, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{D}\mu}\dfrac{C-A}{B}rp, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{D}\mu}\dfrac{A-B}{C}pq. \end{array}\right.$$

De (1), (2) et (β) on tire

$$\begin{aligned} \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= \frac{1}{D\mu^2}p\left(\frac{A-B}{C}q^2 + \frac{A-C}{B}r^2\right), \\ &= \frac{p}{BCD\mu^2}[A(A-A)p^2 + B(A-B)q^2 + C(A-C)r^2], \\ &= \frac{p}{BCD\mu^2}[A(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - (A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2)], \\ &= \frac{p}{BCD\mu^2}(AD\mu^2 - D^2\mu^2), \\ &= \frac{A-D}{BC}p. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}&=\frac{A-D}{BC}p,\\ z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}&=\frac{B-D}{CA}q,\\ x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}&=\frac{C-D}{AB}r.\end{aligned}\right.$$

Enfin, les cosinus des formules (A) s'évaluent aussi aisément

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos(\overline{Ox},\overline{OP})&=\frac{A}{D\mu}p,\\ \cos(\overline{Oy},\overline{OP})&=\frac{B}{D\mu}q,\\ \cos(\overline{Oz},\overline{OP})&=\frac{C}{D\mu}r;\end{aligned}\right.$$

et, comme

$$\cos(\overline{Ox},\overline{Pm})=\frac{\mathrm{Proj}_{ox}\overline{Pm}}{\rho}=\frac{x-\dfrac{1}{\sqrt{D}}\dfrac{A}{D\mu}p}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{D}\mu}\frac{D-A}{D}\frac{p}{\rho},$$

on a aussi :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos(\overline{Ox},\overline{Pm})&=\frac{1}{\sqrt{D}\mu}\frac{D-A}{D}\frac{p}{\rho},\\ \cos(\overline{Oy},\overline{Pm})&=\frac{1}{\sqrt{D}\mu}\frac{D-B}{D}\frac{q}{\rho},\\ \cos(\overline{Oz},\overline{Pm})&=\frac{1}{\sqrt{D}\mu}\frac{D-C}{D}\frac{r}{\rho}.\end{aligned}\right.$$

6. En tenant compte des formules (2), (3), (4) et (5), les équations (A) deviennent

$$\rho\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{D^2\mu^2}\left[\frac{(D-A)(B-C)}{A}+\frac{(D-B)(C-A)}{B}+\frac{(D-C)(A-B)}{C}\right]pqr,$$

$$\rho^2\frac{d\chi}{dt}=\frac{1}{ABCD\mu}[(A-D)A^2p^2+(B-D)B^2q^2+(C-D)C^2r^2]$$

ou, en posant $\Delta = (B - C)(C - A)(A - B)$ et après les réductions immédiates,

$$(B)\quad \left\{\begin{aligned} \rho\,\frac{d\rho}{dt} &= \frac{1}{D\,\mu^2}\left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C}\right)pqr \\ &= \frac{\Delta}{ABCD\,\mu^2}\,pqr, \\ \rho^2\,\frac{d\chi}{dt} &= \frac{1}{ABCD\,\mu}(A^3p^2 + B^3q^2 + C^3r^2 - D^3\mu^2). \end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les seconds membres en fonction de ρ, au moyen des formules (β).

7. La quantité $A^3p^2 + B^3q^2 + C^3r^2 - D^3\mu^2$, que nous désignerons par H, est donnée immédiatement par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu^2 + D\mu^2\rho^2 \\ A & B & C & D\,\mu^2 + 0 \\ A^2 & B^2 & C^2 & D^2\mu^2 + 0 \\ A^3 & B^3 & C^3 & D^3\mu^2 + H \end{vmatrix} = 0,$$

dont le premier nombre, eu égard à la composition de la quatrième colonne, se décompose en deux déterminants dont l'un est le produit de μ^2 par le déterminant de Vandermonde relatif aux quatre quantités A, B, C, D, c'est-à-dire $\mu^2\Delta(D - A)(D - B)(D - C)$, et dont l'autre, développé suivant les éléments de la quatrième colonne, est égal à $-D\mu^2\rho^2 ABC\Delta + H\Delta$, en sorte que l'équation s'écrit

$$H\Delta - D\mu^2\rho^2 ABC\Delta + \mu^2\Delta(D - A)(D - B)(D - C) = 0$$

et donne

$$(6)\qquad H = ABCD\,\mu^2(\rho^2 + E),$$

en posant

$$E = \frac{(A - D)(B - D)(C - D)}{ABCD}.$$

De (β) on tire

$$p^2 = \frac{\begin{vmatrix} \mu^2 + D\mu^2\rho^2 & 1 & 1 \\ D\mu^2 + 0 & B & C \\ D^2\mu^2 + 0 & B^2 & C^2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$= \frac{\mu^2(D-B)(B-C)(C-D) + D\mu^2\rho^2 BC(C-B)}{\Delta}$$

$$= \frac{BCD\mu^2(C-B)}{\Delta}(\rho^2 - a),$$

en posant

$$a = \frac{(D-B)(D-C)}{BCD}.$$

On a, par suite, b et c désignant les quantités déduites de a par une permutation circulaire effectuée sur A, B, C,

$$p^2 q^2 r^2 = -\frac{A^2B^2C^2D^3\mu^6}{\Delta^2}(\rho^2 + a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c),$$

$$(7)\qquad pqr = \frac{ABCD\sqrt{D}\,\mu^3}{\Delta}\sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)}.$$

8. En tenant compte des formules (6) et (7), les équations (B) deviennent enfin

$$(C)\qquad \begin{cases} \rho\,\dfrac{d\rho}{dt} = \sqrt{D}\,\mu\sqrt{-(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c)}, \\ \rho^2\,\dfrac{d\chi}{dt} = \mu(\rho^2 + E). \end{cases}$$

9. Si l'on ne tient pas à mettre en évidence l'unité d'origine des équations (C), il est plus rapide de remplacer, comme on le fait généralement, la première des équations (A) par celle-ci

$$\rho\frac{d\rho}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt},$$

qui se déduit immédiatement de la relation

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \mathrm{OP}^2,$$

et d'où se tire de suite, par les formules (1) et (2), la première des relations (B).

On peut, dans ce cas, écrire aussi directement l'équation différentielle de l'herpolhodie en partant de la formule

$$\operatorname{tang} V = \rho \frac{d\chi}{d\rho},$$

V désignant l'angle de $\overline{Pm}$ avec la tangente à l'herpolhodie.

Les cosinus directeurs de cette tangente étant

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}}, \qquad \ldots,$$

et ceux de $\overline{Pm}$ étant donnés par (5), on a, de suite,

$$\operatorname{tang} V = \frac{[(D - B)qr' - (D - C)rq']^2 + \ldots}{[(D - A)pp' + (D - B)qq' + (D - C)rr']^2}.$$

Or, en vertu des équations d'Euler (α)

$$(D - B)qr' - (D - C)rq'$$
$$= \frac{p}{BC}[(A - B)(D - B)Bq^2 + (A - C)(D - C)Cr^2];$$

ajoutant, dans la parenthèse, $(A - A)(D - A)Ap^2$, et tenant compte des équations (β), cette parenthèse se réduit à $-H$, de sorte que le numérateur $\operatorname{tang}^2 V$ est

$$\frac{H^2}{A^2 B^2 C^2}(A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2) = \frac{H^2 D^2 \mu^2}{A^2 B^2 C^2};$$

quant au dénominateur, il est évidemment égal à

$$D^2(pp' + qq' + rr')^2 = \frac{\Delta^2}{A^2 B^2 C^2} p^2 q^2 r^2.$$

On voit que finalement

$$\operatorname{tang} V = \rho \frac{d\chi}{d\rho} = \frac{\mu}{\Delta} \frac{H}{pqr}.$$

H et pqr ayant été calculés en fonction de ρ (n° 7), on obtient l'équation différentielle de l'herpolhodie.