V. JAMET

Sur la théorie des forces centrales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 216-219

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__216_1>

[R7bβ]

SUR LA THÉORIE DES FORCES CENTRALES;

PAR M. V. JAMET.

Une Lettre de M. Suchar me fait un devoir d'entrer dans quelques éclaircissements au sujet de ma Note, parue, sous le même titre que le présent envoi, dans le numéro d'août 1902. Au nº 10 je disais :

« Ajoutons que cette équation ne diffère pas de celle qu'on trouverait en appliquant la méthode du nº 3 au cas où l'hodographe est la conique représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{\gamma}+\frac{y^2}{\beta}=k,$$

pourvu que k soit convenablement déterminée, etc.... »

Le lecteur qui voudra bien se reporter au n° 3 précité n'aura pas de peine à sous-entendre que c'est là l'équation d'une conique rapportée à deux axes issus de son centre, que je ne suppose nullement confondu avec le centre d'action ni avec l'origine de l'hodographe. C'est, du reste, dans cet esprit, qu'est conçu le calcul qui termine le n° 10 en discussion. Et s'il faut entrer dans le détail du calcul destiné à établir un résultat que d'illustres maîtres ont établi depuis longtemps, on reconnaîtra que ma méthode conduit à chercher l'équation de la trajectoire en effectuant les quadratures qui figurent dans la formule suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{r}=\frac{k\alpha\gamma}{C}\Bigg[\quad &\sin\theta\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos\theta\,d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\\ &-\cos\theta\int_{\theta_1}^{\theta}\frac{\sin\theta\,d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Or on constate immédiatement que

$$\begin{aligned}d&\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta+\gamma\sin^2\theta}}\right)\\ &=\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\alpha\cos^2\theta+\gamma\sin^2\theta}}-\frac{(\gamma-\alpha)\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\\ &=\frac{\alpha\cos\theta\,d\theta}{(\alpha\cos^2\theta+\gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

D'où l'on conclut

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin\theta}{\alpha\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}} + \mathrm{H},$$

H désignant une constante qui dépend de θ_0.

On trouvera, de même,

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sin\theta\, d\theta}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\cos\theta}{\gamma\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}} + \mathrm{K},$$

K désignant une autre constante. L'équation (1) prend donc la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{r} = \frac{k}{\mathrm{C}}\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta} + \frac{k\alpha\gamma}{\mathrm{C}}(\mathrm{H}\sin\theta - \mathrm{K}\cos\theta).$$

En transformant cette équation en coordonnées rectilignes, on trouve l'équation d'une conique.

Ceci soit dit pour bien éclaircir le point suivant :

Si l'on suppose que le centre de la conique hodographe coïncide avec le centre d'action : 1° la trajectoire est une conique ayant son centre au centre d'action; 2° l'accélération est proportionnelle à la distance.

1° Après avoir bien spécifié que l'origine des coordonnées et l'origine de l'hodographe sont au centre d'action, nous observerons qu'à deux points de l'hodographe, diamétralement opposés, savoir m et m', répondront sur la trajectoire deux points situés sur une même droite, issue de l'origine, et parallèle aux tangentes à l'hodographe, en m et m'. En ces deux points, les tangentes à la trajectoire seront parallèles entre elles, étant parallèles à mm'. Soient M et M' ces deux points. Toutes les droites MM' seront des diamètres de la trajectoire. Donc elles passeront toutes au point O, centre de la trajectoire; donc celui-ci ne peut être qu'au centre d'action.

2° En pareil cas, on doit avoir H = 0, et K = 0, comme le montre un calcul facile. Alors on trouve

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{C}\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta},$$

$$R = \frac{k\alpha\gamma}{(\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'expression de l'accélération $\frac{CR}{r^2}$ devient alors

$$\frac{k^3\alpha\gamma}{C\sqrt{\alpha\cos^2\theta + \gamma\sin^2\theta}}$$

ou bien

$$k^2\alpha\gamma.r$$

et, dans le cas actuel, l'accélération est proportionnelle au rayon vecteur, comme cela s'établit dans tous les cours.

Puisque je reviens aujourd'hui sur mon article de 1902, je saisis cette occasion pour signaler quelques *errata,* que le lecteur aura peut-être fait disparaître. A la page 356, dernière ligne, remplacer le mot *tangente* par le mot *cotangente;* page 351, formule finale et suivantes, remplacer le terme final $+2pa$ par $-2pa$; page 365, ligne 13 en descendant, écrire le facteur r au numérateur du deuxième membre.