

GEORGES MAJCEN

**Sur quelques rapports entre les  
triangles et les coniques**

*Nouvelles annales de mathématiques* 4<sup>e</sup> série, tome 3  
(1903), p. 193-209

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1903\\_4\\_3\\_\\_193\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__193_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L'1 a]

**SUR QUELQUES RAPPORTS ENTRE LES TRIANGLES  
ET LES CONIQUES;**

PAR M. GEORGES MAJCEN, à Agram.

---

Les recherches suivantes se rapportent à des groupes de six points situés sur les côtés d'un triangle donné, et remplissant une certaine condition.

J'ai déjà signalé dans mon Mémoire : *Über gewisse Scharen homothetischer Kegelschnitte in der Dreiecksgeometrie* (1) de tels groupes de points, qui dépendent d'un angle quelconque  $\omega$ . Des observations analogues peuvent être faites en remplaçant l'angle  $\omega$  par une longueur (S) donnée, de laquelle dépendent des groupes nouveaux.

Ici, je me propose d'indiquer quelques relations métriques, d'une façon purement géométrique; cette méthode me semble présenter un certain intérêt, bien que ce ne soit pas la plus concise.

1. Étant donné un triangle ABC (les trois angles étant aigus) (*fig. 1*), on décrit de chaque sommet comme centre, un cercle avec le même rayon. Nous allons démontrer que les trois couples de points d'intersection  $A', A''$ ;  $B', B''$ ;  $C', C''$  des cercles avec les côtés opposés respectifs sont situés sur une conique.

Examinons auparavant les positions des milieux des six rayons  $AA', AA'', \dots, CC''$ . Soient  $B_1$  et  $C_1$  les milieux des longueurs  $BB' = CC'$ . Si l'on décrit, sur les

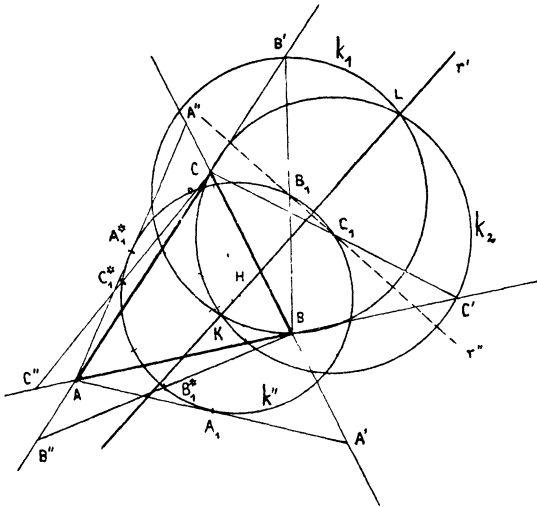
---

(1) *Archiv der Mathematik und Physik*, 3<sup>e</sup> série, t. IV, p. 76.  
*Ann. de Mathémat.*, 4<sup>e</sup> série, t. III. (Mai 1903.)

diagonales  $BB'$  et  $CC'$  du quadrilatère complet  $BCB'C'$  comme diamètres, les cercles  $k_1$  et  $k_2$ , leurs points d'intersection seront  $K$  et  $L$ . L'axe radical est l'axe de symétrie du segment  $B_1C_1$ .

D'après un théorème connu (1), les côtés de tout angle droit, dont le sommet est le point  $K$  ou  $L$ , touchent une certaine conique, inscrite dans le quadrilatère  $BCB'C'$ . La droite  $r'$  (ou  $KL$ ) sera la direc-

Fig. 1.



trice de l'unique *parabole* possible inscrite dans le quadrilatère.

On sait aussi que les orthocentres des quatre triangles, déterminés par les trois couples des côtés du quadrilatère, sont situés sur la directrice de cette parabole (2).

(1) Voir REYE, *Die Geometrie der Lage*, 3<sup>e</sup> édit., I<sup>re</sup> Partie, p. 214.

(2) La droite de Newton  $B_1C_1$  est perpendiculaire sur  $r'$ . Voir STEINER-WEIERSTRASS, *Gesammelte Werke*, t. I, p. 223, 6<sup>o</sup>, 7<sup>o</sup>.

Comme les points  $B_1$  et  $C_1$ , symétriques par rapport à la droite  $r'$ , ces points seront également distants de l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ , qui est un de ces quatre triangles précités.

On démontrera de la même manière que les milieux  $A_1$  et  $C_1$ , des segments  $AA'$  et  $CC'$  et aussi les milieux  $A_1^*$  et  $B_1^*$ , des longueurs  $AA''$  et  $BB''$  sont équidistants de l'orthocentre  $H$ .

On aura la même démonstration pour un triangle obtusangle. Nous avons donc le théorème suivant :

*Si l'on mène de chaque sommet du triangle  $ABC$  deux droites telles que les longueurs des six segments limités aux côtés opposés respectifs soient égales, les milieux de ces six segments sont sur un cercle ayant pour centre l'orthocentre du triangle.*

2. En vue de ce qui doit suivre, considérons le triangle  $ABC$ , avec les six segments égaux  $AA'$ ,  $AA''$ ,  $BB'$ , ...,  $CC''$ , comme une *projection centrale* d'une certaine figure de l'espace. Le plan du triangle  $ABC$  étant le plan de projection, soient  $A$ ,  $B$ ,  $C$  les traces et  $A'$ ,  $A''$ , ...,  $C''$  les points de fuite des six droites respectives  $a'$ ,  $a''$ ,  $b'$ , ...,  $c''$  de l'espace (*fig. 2*).

Élevons par l'orthocentre  $H$  une perpendiculaire au plan de projection et choisissons sur celle-ci un point ( $Z$ ) quelconque. Ce point ( $Z$ ) étant le centre de projection, chaque couple de droites :  $a'$ ,  $a''$ ;  $b'$ ,  $b''$ ;  $c'$ ,  $c''$  sera symétrique par rapport à un certain plan  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , mené par la perpendiculaire  $ZH$  et la hauteur respective du triangle  $ABC$ .

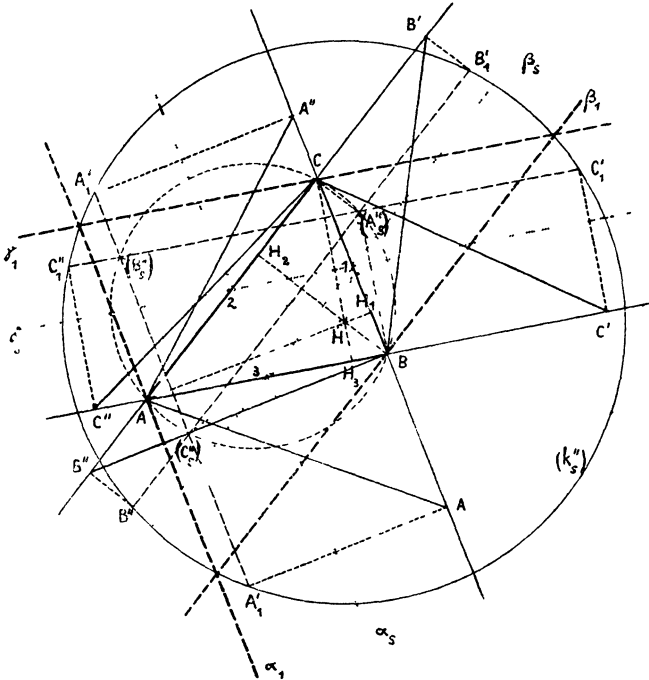
Le plan  $\pi'$  étant le premier plan parallèle (appelons ainsi le plan mené par  $Z$  parallèlement au plan de projection), les traces des six droites  $a'$ ,  $a''$ ;  $b'$ ,  $b''$ ;  $c'$ ,  $c''$

( 196 )

sur ce plan seront sur une *circonférence*  $k'_s$  ayant le point  $Z$  pour centre, puisque les six longueurs des projections sont toutes *égales*.

Menons le deuxième plan parallèle  $\pi''$  (c'est-à-dire le plan symétrique du plan  $\pi'$  par rapport au plan de pro-

Fig 2



jection); les traces des six droites  $a', a'', b', b'', c', c''$  sur ce plan  $\pi''$  seront aussi sur une *circonférence*. En effet, nous avons démontré que les milieux  $A_1, A_1^*, B_1, B_1^*, C_1, C_1^*$  des six longueurs  $AA', AA'', \dots, CC''$  sont situés sur une *circonférence*  $(k''_s)$ . Ces milieux sont dans notre interprétation de la figure de l'espace les projections des traces des six droites  $a', a'', b', \dots, c''$

sur le plan  $\pi''$ ; alors ces traces considérées seront sur une *circonférence*  $k_s''$ . Nous ajoutons seulement que le rayon du cercle  $k''$  est au rayon du cercle  $k_s''$  comme 1 à 2.

Considérons spécialement le couple des droites  $a'$ ,  $a''$ , leurs traces sur le plan  $\pi'$  étant  $A'_v$  et  $A''_v$ , et sur  $\pi''$ ,  $A'_s$  et  $A''_s$ . Les triangles  $AA'_vA''_v$  et  $ZA'A''$  sont congruents, parce que  $ZA'$  et  $ZA''$  étant les droites de fuite correspondantes aux droites  $a'$  et  $a''$ , les longueurs  $A'_vA''_v$  et  $A'A''$  sont égales. On voit de même que les longueurs  $A'_sA''_s$  et  $A'A''$  seront aussi égales.

On démontre de la même manière que les *cordes*  $B'_v, B''_v$  et  $B'_s, B''_s$  déterminées par les droites  $b'$  et  $b''$  sur les circonférences  $k'_v$  et  $k''_s$  sont égales à la longueur  $B'B''$  sur le côté AC du triangle ABC, et de même pour le troisième couple  $C', C''$ .

Ces rapports ne dépendent pas d'un choix arbitraire du centre de projection Z sur la perpendiculaire ZH, parce qu'ils sont indépendants des relations angulaires.

Soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les plans passant par  $a'a''$ ,  $b'b''$ ,  $c'c''$ . Ils seront parallèles aux trois plans déterminés par Z et les côtés BC, AC, AB respectivement. Cherchons les projections centrales des droites d'intersection des plans  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  avec le plan  $\pi''$ . Les traces de ces trois plans  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sur le plan de projection sont les côtés BC, AC, AB, et leurs droites de fuite les trois parallèles  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  menées par les sommets A, B, C aux côtés opposés. La droite  $\alpha_s$  qui passe par le milieu de la distance des droites  $\alpha_1$  et BC parallèlement à celles-ci sera la *projection* de la droite *commune* aux plans  $\alpha$  et  $\pi''$ . Nous obtiendrons de la même manière les projections des deux autres droites ( $\beta\pi''$ ) et ( $\gamma\pi''$ ) en  $\beta_s$  et  $\gamma_s$ . Les trois lignes  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$ ,  $\gamma_s$  forment un triangle nouveau 123, inscrit au triangle ABC, dont les côtés auront des

longueurs égales aux moitiés des côtés parallèles du triangle fondamental.

Il suit de là que le triangle ABC et le triangle formé par les trois droites  $(\alpha\pi'')$ ,  $(\beta\pi'')$ ,  $(\gamma\pi'')$  sont *congruents*, parce que les côtés de celui-ci sont les doubles des côtés correspondants du triangle 1 2 3, c'est-à-dire de la projection du triangle sur  $\pi''$ .

Projetons le triangle, dont les directions des côtés sont  $(\pi''\alpha)$ ,  $(\pi''\beta)$ ,  $(\pi''\gamma)$ , sur le plan de projection (ABC), orthogonalement. Les projections orthogonales des points en lesquels les droites  $a'a''$ ,  $b'b''$ ,  $c'c''$  percent le plan  $\pi''$ , seront  $A'_1, A''_1, B'_1, B''_1, C'_1, C''_1$ , points situés sur un cercle  $(k''_s)$  qui est la projection orthogonale du cercle  $k_s$  sur  $\pi''$ . Les trois cordes de ce cercle :  $A'_1A''_1, B'_1B''_1, C'_1C''_1$  seront égales aux longueurs  $A'A'', B'B'', C'C''$ .

Le triangle considéré  $A''_sB''_sC''_s$  aura pour projection orthogonale le triangle  $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$ .

Le couple de droites  $a', a''$  donne avec la corde  $A'_1A''_1$  (sur  $\pi''$ ) un triangle  $AA'_1A''_1$ . Le plan de celui-ci forme avec le plan de projection le même angle que le plan du triangle  $ZA'A''$ . A cause de la congruence des triangles  $AA'_1A''_1$  et  $ZA'A''$ , les projections orthogonales de leurs hauteurs auront alors les mêmes longueurs, c'est-à-dire que la distance de la corde  $A'_1A''_1$  au sommet A sera *égale à la distance*  $HH_1$ ,  $H_1$  étant le point d'intersection de la hauteur AH avec le côté BC. Nous trouverons pareillement que les distances des cordes  $B'_1B''_1$  et  $C'_1C''_1$  à B et C seront égales aux distances  $HH_2$  et  $HH_3$ , respectivement.

Le sommet  $(A''_s)$  du triangle  $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$  est alors le point d'intersection des cordes  $B'_1B''_1$  et  $C'_1C''_1$ . La corde  $B'_1B''_1$  divise la hauteur  $BH_2$  du triangle ABC en deux parties, dont la première sera égale à la lon-

gueur  $HH_2$ ; or on voit que l'autre doit être égale à  $BH$ .

Nous démontrerons que la longueur  $C(A''_s)$  est égale à  $BH$ .

Le triangle  $A''_s B''_s C''_s$ , dans le plan  $\pi''$ , et sa projection  $123$  sont des triangles homologues par rapport au point  $Z$  comme centre d'*homologie*. Le triangle  $123$  et la projection orthogonale  $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$  du premier seront aussi *homologiques* par rapport à la projection orthogonale  $H$  du centre  $Z$ .

Alors les points  $H, 1, (A''_s)$  se trouvent sur la même droite. Nous avons vu que la distance du sommet  $C$  à  $C'_1 C''_1$  est égale à  $\overline{HH_3}$ ; or la droite  $\gamma_s$  (ou  $1, 2$ ) divise aussi la distance entre  $H$  et  $C'_1 C''_1$  en deux parties égales. On a

$$\overline{1H} = \overline{1(A''_s)} \quad \text{et} \quad \overline{1C} = \overline{1B};$$

alors le quadrilatère  $HB(A''_s)C$  est un parallélogramme. Comme  $BH$  est perpendiculaire sur  $CA$  et  $CH$  sur  $AB$ ,  $(A''_s)C$  sera aussi perpendiculaire sur  $CA$  et  $(A''_s)B$  sur  $AB$ . On démontre pour  $(B'_s)$  et  $(C''_s)$  des propriétés pareilles (<sup>1</sup>).

Nous appliquerons aux points  $A'_1, A''_1, B'_1, B''_1, C'_1, C''_1$ , communs au cercle  $(k''_s)$  et aux côtés du triangle  $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$ , l'équation de Carnot :

$$\frac{(A''_s)C'_1 \cdot (A''_s)C''_1}{(B''_s)C'_1 \cdot (B''_s)C''_1} \cdot \frac{(B''_s)A'_1 \cdot (B''_s)A''_1}{(C''_s)A'_1 \cdot (C''_s)A''_1} \cdot \frac{(C''_s)B'_1 \cdot (C''_s)B''_1}{(A''_s)B'_1 \cdot (A''_s)B''_1} = 1.$$

Nous aurons aussi la même relation pour le triangle  $ABC$  et les points  $A', A'', B', B'', C', C''$ , parce que les triangles  $ABC$  et  $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$  sont congruents et que

(<sup>1</sup>) Les triangles  $ABC$  et  $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$  sont en *homologie centrale*; ils sont inscrits à un cercle.



l'on a

$$\begin{aligned} AC'' &= (B''_s)C''_1, & BC' &= (A''_s)C'_1, & BA' &= (C''_s)A'_1, \\ CA'' &= (B''_s)A''_1, & CB' &= (A''_s)B'_1, & AB'' &= (C''_s)B''_1. \end{aligned}$$

Le théorème suivant est alors établi :

*Étant menées de chaque sommet d'un triangle deux droites, telles que toutes les six aient, jusqu'aux côtés opposés respectifs, la même longueur, les six points d'intersection sur les côtés seront situés sur une conique ( $k$ ).*

En général, cette conique ne sera pas un cercle, parce que les positions des six longueurs  $AC''$ ,  $BC'$ ,  $CA''$ ,  $AB''$ ,  $CB'$ ,  $BA'$  ne seront pas les mêmes par rapport à  $ABC$  et à  $(A''_s)(B''_s)(C''_s)$ .

En tenant compte d'un théorème connu <sup>(1)</sup>, on a, réciproquement, la proposition suivante :

*Étant menées de chaque sommet d'un triangle deux droites, telles que toutes les six aient, jusqu'aux côtés opposés respectifs, la même longueur, les six droites seront tangentes à une conique ( $k'$ ).*

Nous remarquons que les trois cordes  $A'A''$ ,  $B'B''$ ,  $C'C''$  de la conique  $k$  ont des symétrales <sup>(2)</sup> passant par un même point ( $H$ ); et, dans cet ordre d'idées, nous nous bornons à proposer la question suivante :

*Combien y a-t-il de cordes d'une conique, dont les symétrales passent par un point donné? Comment seront-elles déterminées?*

<sup>(1)</sup> Voir STEINER-SCHRÖTER, *Die Theorie der Kegelschnitte*, 2<sup>e</sup> édit., p. 222, exemple 24.

<sup>(2)</sup> Ce mot semble être employé ici par l'auteur, comme équivalent à celui d'axe de symétrie. (N. D. L. R.)

3. Nous examinerons la position des six points  $A'$ ,  $A''$ ,  $B'$ ,  $B''$ ,  $C'$ ,  $C''$  à l'égard des longueurs

$$AA' = AA'' = BB' = BB'' = CC' = CC'' = S$$

et des formes du triangle fondamental  $ABC$ , et nous déterminerons les espèces des coniques ( $k$ ) qui en résultent.

Il faut distinguer les positions des six points par rapport aux sommets du triangle par les signes  $+$  et  $-$  et prendre en considération les combinaisons qui rendent positif le premier membre de l'équation de Carnot.

Dans cette équation

$$\frac{BA' \cdot BA''}{CA' \cdot CA''} \frac{CB' \cdot CB''}{AB' \cdot AB''} \frac{AC' \cdot AC''}{BC' \cdot BC''} = 1,$$

les douze longueurs auront des signes déterminés; ces signes seront, par exemple pour  $BA'$  et  $BA''$ , *différents* ou *identiques* selon que les points  $A'$  et  $A''$  (sur  $BC$ ) occupent des régions différentes ou la même région par rapport au sommet  $B$ ; en cela, le choix du sens positif du côté  $BC$  reste entièrement indifférent.

Le premier membre de l'équation de Carnot aura, en raison de toutes les variations possibles entre les signes des douze longueurs, 729 formes. Parmi ces formes, choisissons seulement celles qui rendent les trois quotients *positifs*, ou deux *négatifs* et un *positif* (<sup>1</sup>).

4. Nous considérerons les positions essentiellement diverses des points  $A'$ ,  $A''$ ,  $B'$ ,  $B''$ ,  $C'$ ,  $C''$  pour un triangle  $ABC$  général, ayant ses trois angles *aigus*. Les points  $C'$  et  $C''$  sont ou tous les deux (sur le côté  $AB$ )

---

(<sup>1</sup>) Je n'ai pu trouver ni dans la *Géométrie de position*, de Carnot, ni dans un autre Ouvrage la distinction des espèces de coniques à l'égard de l'équation de Carnot. Les considérations suivantes se rapportent au théorème donné dans le n° 2.

entre les points A et B, ou tous les deux hors du segment  $\overline{AB}$ , de part et d'autre des sommets A, B, ou enfin l'un sur le segment  $\overline{AB}$ , l'autre en dehors. Pour le triangle ABC choisi, le cas où les deux points seraient hors du segment  $\overline{AB}$ , et du même côté d'un des sommets (A ou B) ne sera pas possible.

Alors nous aurons pour le triangle ABC les cas typiques suivants (fig. 3, 4, 5 et 6) :

Fig. 3.

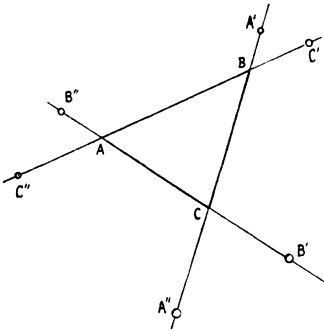


Fig. 4.

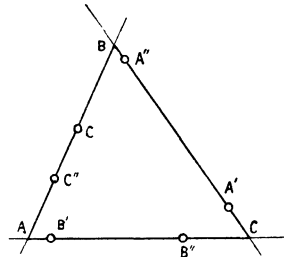


Fig. 5.

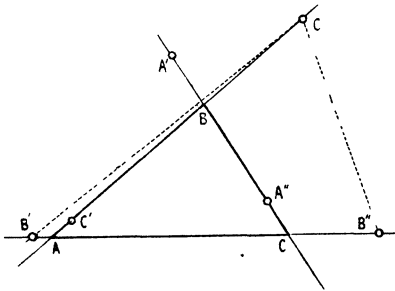
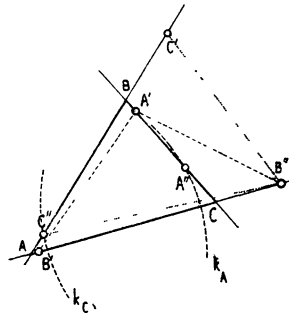


Fig. 6.



Les trois quotients de l'équation de Carnot étant tous positifs :

$$\frac{- \cdot +}{- \cdot +} \frac{- \cdot +}{- \cdot +} \frac{- \cdot +}{- \cdot +} = +$$

et

$$(4) \quad \frac{+.+.}{-.-} \frac{+.+.}{-.-} \frac{+.+.}{-.-} = +;$$

deux des quotients étant *négatifs* et l'un *positif* :

$$(5) \quad \frac{+.+.}{-.+} \frac{+.-}{+.+} \frac{-.+}{-.+} = +$$

et

$$(6) \quad \frac{+.+.}{-.+} \frac{+.+.}{+.-} \frac{+.+.}{-.-} = +;$$

les quatre cas dépendent aussi de la longueur  $s$  des distances égales

$$AA' = AA'' = BB' = BB'' = CC' = CC''.$$

Ces deux conditions ne sont aucunement indépendantes entre elles.

Nous aurons le cas (3) si la longueur  $s$  est *plus grande* que le *plus grand* côté du triangle. On reconnaît aisément que dans ce cas aucun des six points n'est situé *entre* deux quelconques des sommets du triangle.

La longueur  $s$  étant *plus petite* que le *plus petit* côté du triangle, nous avons le cas (4), où aucun des six points ne peut être hors des côtés du triangle.

Il faut, dans le cas (5), que la longueur  $s$  soit *plus petite* que le *plus grand* côté, mais *plus grande* que le côté *moyen* du triangle, parce qu'un des trois couples de points doit être séparé par un sommet sur un côté. Il s'ensuit qu'on aura une séparation d'un deuxième couple de points sur un autre côté. En effet, à cause de  $AA'' < AC$ , alors aussi  $CC'' < AC$ ; le point  $C''$  sera entre les sommets  $A$  et  $B$ . Le couple de points qui sera séparé à la fois par les deux sommets sur un côté  $\left(\frac{-.+}{-.+}\right)$  doit être toujours situé sur le plus grand côté (dans la figure 5, c'est le couple  $B', B''$ ).

Nous aurons enfin le cas (6) pour une longueur  $s$ , plus grande que le plus petit côté, mais plus petite que le côté moyen du triangle. Le couple de points qui n'est séparé par aucun sommet  $\left(\begin{smallmatrix} + & \cdot & + \\ - & \cdot & - \end{smallmatrix}\right)$  sera sur le plus petit côté (dans la figure 6, c'est le couple  $A', A''$ ).

Le couple  $A', A''$  du cas (5) est séparé par le sommet B sur BC; alors le point  $A''$  étant entre les sommets B et C, menons les droites de jonction  $B'C'$  et  $C'B''$ . La première de ces droites coupera le côté BC hors du segment BC, parce que les points  $B'$  et  $C'$  sont sur les prolongements des longueurs AC et AB. Il s'ensuit que le point  $A''$  sera à l'intérieur du triangle  $B'CB''$ . La conique  $A'A''B'B''C'C''$  sera alors, d'après un théorème bien connu, une *hyperbole*.

Joignons dans la figure 6, celui ( $A'$ ) des deux points situés sur le plus petit côté ( $A'$  et  $A''$ ) qui est le plus éloigné du plus grand côté (AC), aux points  $B'$  et  $B''$  situés sur le plus grand côté. Le point  $A''$  sera à l'intérieur du triangle  $A'B'B''$  parce qu'il se trouve entre les sommets B et C. La conique des six points pour le cas (6) sera encore une *hyperbole*, et nous avons le théorème suivant :

*Un couple quelconque des six points  $A', A''; B', B''; C', C''$  étant séparé par un sommet seulement, la conique des six points sera une hyperbole.*

Dans les cas (5) et (6) la conique  $k$  ne peut pas être un cercle; mais on démontre aisément que cette conique ne pourra pas être un cercle non plus dans les cas (3) et (4) pour un triangle général acutangle.

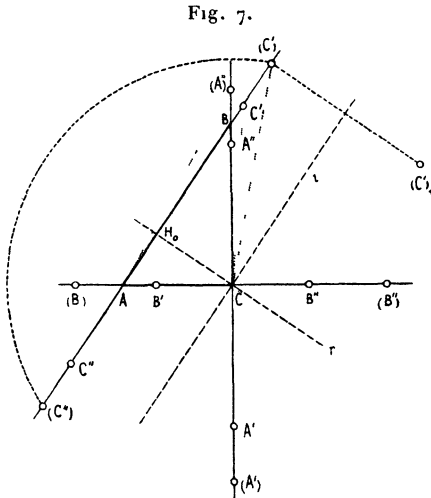
Si cela était possible, le cercle  $k$  aurait le point H pour centre, parce que par ce point passent les trois symétrales des cordes  $A'A'', B'B'', C'C''$  (fig. 1). Alors les cercles  $k$  et  $k''$  seraient concentriques et les droites  $B, B'$

et  $C, C'$  symétriques par rapport à la droite  $r'$ . Il s'en-suivrait que les sommets  $B$  et  $C$  seraient équidistants du point  $H$ , et c'est ce qui n'est pas possible pour un triangle général.

On trouve des résultats pareils pour un triangle *iso-scèle*, où seulement les cas (3) et (6) peuvent avoir lieu. Si  $\nu$  est la hauteur et  $l$  la longueur des côtés égaux, nous avons ou  $s > l$  ou  $\nu \leq s < l$ . Dans ce dernier cas la conique des six points sera une *hyperbole*.

5. On aura des propriétés particulières pour la courbe des six points, si l'on se donne un *triangle rectangle* fondamental.

On peut distinguer deux cas pour l'espèce de la conique  $k$  suivant que la longueur  $s$  est *plus petite* ou *plus grande* que l'hypoténuse  $c$  (*fig. 7*).



Les couples de points sur les côtés de l'angle droit seront toujours séparés par le sommet  $(C)$  de cet angle

si l'on a  $s < AB$ ; ils seront séparés aussi par les sommets B, A pour  $s > AB$ . Dans les deux cas, le couple  $C', C''$  sur l'hypoténuse sera séparé par les sommets A et B, car la longueur  $s$  doit être plus grande que le plus grand côté de l'angle droit BC; alors le point  $C'$  se trouve toujours hors du segment AB.

D'après les développements précédents, on voit ici que la conique  $k$  pour  $s < AB$  sera une *hyperbole*, mais qu'elle ne pourra pas être une hyperbole pour  $s > AB$ .

En outre, le sommet C du triangle sera le milieu commun des cordes  $A'A''$ ,  $B'B''$  qui sont situées sur les côtés de l'angle droit. Ce sommet C sera le *centre commun* pour toutes les coniques  $k$ . Les points  $C'$  et  $C''$  sur l'hypoténuse, étant toujours symétriques par rapport à la hauteur  $CH_0$ , cette hauteur sera la direction d'un axe et l'hypoténuse elle-même la direction de l'autre axe.

Or, toutes les coniques  $k$  qui correspondent à un triangle rectangle auront *deux axes limités*. Pour le cas  $s > AB$ , toutes les coniques seront donc des *ellipses*.

On démontre encore aisément que parmi les coniques  $k$  aucun cercle ne se rencontrera. En effet, on ne pourrait le chercher que parmi les ellipses; alors nous aurions

$$C(A'') = C(C')$$

et, à cause de  $C(C'') = A(A'')$ ,

$$C(A'') = A(A''),$$

ce qui n'est pas possible pour une longueur  $s$  limitée.

La conique  $k$  étant *hyperbole* (*fig. 7*), le quadrilatère  $A'B'A''B'$  sera un parallélogramme et ses sommets opposés seront sur les branches distinctes de la courbe.

Les droites  $r$  et  $i$  étant les axes des coniques  $k$ , les

points  $A''$  et  $C'$  seront sur le même quart de la courbe et par suite sur la même branche.

Les faisceaux homographiques  $A'(A'', C', \dots)$  et  $B''(A'', C', \dots)$  seront de même sens, car  $A''$  se trouve entre  $B$  et  $C$ . Or, les centres des faisceaux  $A'$  et  $B''$  seront sur la même branche. L'axe  $i$  sépare les points  $A'$  et  $C''$  des quatre autres, mais il ne sépare pas ces deux points eux-mêmes. Cet axe  $i$  sera alors l'axe imaginaire pour toutes les hyperboles  $k$ .

La conique étant une ellipse, le point  $(C')$  sera hors de la longueur  $AB$ . Nous avons aussi, à cause de  $BH_0 > CH_0$ ,

$$(C')H_0 > CH_0 \quad \text{et} \quad {}_2(C')H_0 > {}_2CH_0.$$

Le parallélogramme rectangle  $(C')(C'')$  inscrit à l'ellipse aura pour côtés

$${}_2(C')H_0 = (C')(C'') \quad \text{et} \quad {}_2CH_0 = (C')(C')_1;$$

son plus grand côté est alors  $(C')(C'')$ . Si l'on décrit du point  $C$  le cercle circonscrit à ce parallélogramme, le point  $(A'')$  sera situé nécessairement à l'intérieur de ce cercle; en effet, nous avons, à cause de  $A(A'') > C(A'')$ ,

$$C(C') = A(A'') \quad \text{et} \quad C(C') > C(A'').$$

Le point  $A''$  sera toujours *entre* l'arc de cercle  $(C')(C'')$  et la corde  $(C')(C'')$ , et comme cette dernière, ainsi qu'on l'a vu, est le côté le plus grand du parallélogramme, il s'ensuit que l'axe  $i$  étant parallèle à ce côté sera le *grand axe* de l'ellipse  $k$ .

On a donc le théorème qui suit :

*La droite  $i$ , menée par le sommet de l'angle droit du triangle rectangle  $ABC$ , contient tous les grands axes des ellipses et tous les axes imaginaires des hyperboles des six points.*



6. Le triangle fondamental étant un *triangle obtusangle* général, il se peut qu'un couple de points soit entièrement hors d'un côté, et cela du même côté d'un sommet. Il peut arriver que cela ait lieu aussi pour un deuxième couple de points. La conique résultante sera dans ces deux cas une *hyperbole*.

7. Nous avons vu (*fig. 5*) que le point  $A''$  doit être à l'intérieur du triangle  $B'C'B''$ . Mais cela a lieu aussi, le point  $C''$  étant entre les sommets  $A$  et  $B$ . On reconnaît aisément que le point  $A''$  doit être, avec deux sommets du triangle  $B'C'B''$ , sur la même branche de la conique  $k$ . Sur cette branche se trouvera aussi le point  $C'$ , parce que l'autre branche passe déjà par un point ( $C'$ ) du côté  $AB$ .

Nous démontrerons que les points  $A'$  et  $A''$ , dans la figure 6, sont toujours à l'intérieur du triangle  $C'C''B''$ .

Des points  $A$  et  $C$  comme centres, soient décrits deux cercles  $k_A$  et  $k_C$  ayant pour rayons la longueur  $s$ , employée pour la détermination des six points. Les sommets  $A$  et  $C$  sont donc symétriques par rapport à la corde commune aux deux cercles. Nous avons vu que les points  $A'$  et  $A''$  seront sur le plus petit côté du triangle fondamental. Or, nous avons

$$BAC < BCA,$$

c'est-à-dire que le point  $C''$  sera plus rapproché du côté  $AC$  que le point  $A''$  ( $AA''$  et  $CC''$  étant égaux). Les points  $A'$  et  $A''$  seront alors toujours sur le même côté de la droite de jonction  $C'B''$ . Il s'ensuit que les points  $A'$  et  $A''$  doivent être toujours à l'intérieur du triangle  $C'C''B''$ . On démontre de la manière précédente que les quatre points  $C'$ ,  $A'$ ,  $A''$ ,  $B''$  sont toujours sur la même branche de la courbe  $k$ .

Cette règle était déjà établie pour le triangle rectangle fondamental et on la démontrera de la même manière pour un triangle obtusangle; nous avons ainsi le théorème suivant :

*La conique des six points étant une hyperbole, quatre de ces six points seront toujours sur une même branche.*

En prenant en considération les développements précédents, on verra que la conique des six points *dégenerera* seulement de telle façon qu'une de ses parties deviendra *identique* avec un côté quelconque du triangle fondamental. On peut regarder cette règle comme une solution de la question posée par M. E. Lemoine (*Archiv der Math. und Phys.*, t. I, 1901, p. 206) :

*Soit ABC un triangle; A', B', C' sont les points où une droite coupe BC, CA, AB. Démontrer qu'on ne peut avoir  $AA' = BB' = CC'$ .*