NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

D. MIRIMANOFF

Sur l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 17-21

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__17_1>

[I19c]

SUR L'ÉQUATION $x^3+y^3+z^3=t^3$;

PAR M. D. MIRIMANOFF,
Privat-docent à l'Université de Genève.

On sait que l'équation

$$x^3+y^3=z^3$$

n'admet pas de solutions entières (Fermat, Legendre).

Mais considérons l'équation plus générale

$$x^3+y^3+z^3=t^3, \tag{1}$$

qui présente une certaine analogie avec l'équation classique

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Euler, le premier, prouva que l'équation (1) admet une infinité de solutions entières [1]. Il montra, de plus, que toutes les solutions de (1), entières ou non, s'expriment en fonction entière de quatre paramètres.

En 1841, Binet (*C. R.*, t. XII) fit voir que le nombre de ces paramètres pouvait être réduit à deux.

Enfin Hermite, dans une Note qui fut insérée dans ces *Annales* mêmes (2e série, t. II, 1872), montra que les formules d'Euler simplifiées par Binet pouvaient être déduites d'une propriété générale des surfaces du troisième ordre.

Essayons d'établir ces résultats d'une manière plus directe.

Au lieu de l'équation (1), considérons, comme l'a déjà fait Hermite, la suivante :

$$(2) \qquad x^3 + y^3 = z^3 + t^3,$$

qui se ramène à

$$(3) \qquad x'^3 + y'^3 = z'^3 + 1,$$

en posant

$$x' = \frac{x}{t}, \qquad y' = \frac{y}{t}, \qquad z' = \frac{z}{t}.$$

Soient α une racine cubique imaginaire de l'unité, $\beta = \alpha^2$ sa conjuguée. L'équation (3) peut s'écrire

$$(4) \qquad (x' - 1)(x' - \alpha)(x' - \beta) + y'^3 = z'^3.$$

Appelons K l'ensemble de toutes les fonctions ration-

---

[1] En voici une : $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $t = 6$.

nelles (à coefficients entiers) de α, ou bien l'ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{-3}$, a et b étant des fractions ordinaires quelconques positives ou négatives.

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} y' = u(x'-\alpha) + v(x'-\beta), \\ z' = u\beta(x'-\alpha) + v\alpha(x'-\beta). \end{cases}$$

A tout système de valeurs x', y', z' (solutions ou non), sauf $x' = \alpha$, β, correspond un système u, v et un seul. Si x', y', z' appartiennent au domaine K, u, v en font partie aussi.

Portons maintenant les valeurs (5) dans (4). L'équation (4) ainsi transformée ne contiendra pas les cubes de $u(x'-\alpha)$ et $v(x'-\beta)$; elle sera, de plus, divisible par $(x'-\alpha)(x'-\beta)$. Divisons-la par ce produit. Le degré de l'équation par rapport à x' se réduit à 1 et, par conséquent, toutes les racines x' différentes de α et β sont fonctions rationnelles de u et v (à coefficients appartenant au domaine K).

On a

$$(6)\qquad x' = \frac{1 + 3(\beta-1)uv^2 + 3(\alpha-1)u^2v}{1 + 3(1-\alpha)uv^2 + 3(1-\beta)u^2v}.$$

Désignons le dénominateur de x' par D.

En vertu de (5), y' et z' sont, de même que x', fonctions rationnelles des paramètres u et v,

$$y' = \frac{(1-\alpha)u + (1-\beta)v - 9u^2v^2}{D},$$

$$x' = \frac{(\beta-1)u + (\alpha-1)v - 9u^2v^2}{D}.$$

On obtient ainsi toutes les solutions de l'équation (3), sauf $x' = \alpha$, β, en donnant aux paramètres u, v des valeurs quelconques.

Solutions réelles. — Pour que x', y', z' soient réelles, il faut et il suffit [en vertu de (5)] que $u + v$, $\beta u + \alpha v$, $\alpha u + \beta v$ soient réels; u est donc le conjugué de v.

Posons $\beta u + \alpha v = a$, $u + v = b$, d'où

$$\alpha u + \beta v = -a - b, \qquad uv = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Les formules (6) deviennent

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{(a^2 + ab + b^2)(a + 2b) - 1}{a^3 - b^3 - 1}, \\ y' = \dfrac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a - 2b}{a^3 - b^3 - 1}, \\ z' = \dfrac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a + b}{a^3 - b^3 - 1}, \end{cases}$$

et l'on retombe sur les expressions obtenues par Hermite, d'où l'on déduit très simplement la première série des formules de Binet.

On obtient toutes les solutions réelles de (3) en donnant aux paramètres a, b des valeurs réelles quelconques.

Posons maintenant $\dfrac{a + 2b}{3} = p$, $\dfrac{b - a}{3} = q$, d'où

$$a = p - 2q, \qquad b = p + q.$$

Les formules (7) deviennent

$$(8) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{1 - 9p(p^2 - pq + q^2)}{1 + 9q(p^2 - pq + q^2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et l'on retombe, en revenant à l'équation (2), sur la deuxième série des formules de Binet.

Solutions rationnelles. — Si x', y', z' sont des nombres rationnels, les paramètres a, b et p, q sont, en vertu de (5), rationnels aussi. On obtient donc toutes les solutions rationnelles de (3) en donnant aux paramètres a, b ou p, q des valeurs rationnelles quelconques.

A toute solution rationnelle de (3) correspond une solution entière de (2) en multipliant par le dénominateur des trois fractions de (3). On en déduit facilement des formules générales donnant toutes les solutions entières de (2).