NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CARLO BOURLET

Sur le mouvement d'un point pesant sur une courbe, avec une résistance proportionnelle au carré de la vitesse

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 175-183

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__175_0>

[R7f]

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT PESANT SUR UNE COURBE, AVEC UNE RESISTANCE PROPORTIONNELLE AU CARRÉ DE LA VITESSE;

Par M. Carlo BOURLET.

L'idée de traiter le petit problème qui va suivre m'a été suggérée par une acrobatie connue sous le nom anglais *looping the loop* et qu'exécutent actuellement des cyclistes acrobates dans diverses grandes villes du monde.

---

considere si, les series (c) etant supposees nulles, tous les premiers membres des equations, sauf le premier, ne se reduisaient identiquement a zero lorsque seulement les deux premieres des series (c) c'est à-dire Φ et Ψ s'annulent C'est ce qu'on peut verifier facilement par des derivations successives

Il resulte de là, qu'en aucun cas les $h_1, h_2, \ldots$ ne peuvent être tels que les $\omega - 1$ series (c) s'annulent ($\omega > 2$) et, par consequent, il est impossible de tirer parti de la fonction $\sum \frac{1}{p^\omega}$ supposee convergente, comme nous l'avons fait dans certains cas de $\sum \frac{1}{s^\omega}$

Si l'on remarque que l'equation du second ordre

$$\Phi\Theta - \Phi\,\Theta + (\Phi - \Phi\Psi')\,\Theta = 0$$

est precisement formee avec les deux series en question (dont, d'apres ce qui precede, la seconde ne peut s'annuler), on voit que les fonctions du groupe sont toujours les quotients des intégrales Θ de cette equation qui existe toujours lorsque les F elles-mêmes existent ceci demontre a nouveau ce theoreme, à savoir que les fonctions du groupe sont *toutes* donnees par la formule

$$\frac{\lambda F + \mu}{\nu F + \rho},$$

F étant l'une d'elles, theoreme que nous avons établi directement et dont nous ne nous sommes pas servi pour former l'équation en Θ

La piste sur laquelle s'effectue le tour, large de 1^m à 2^m, se compose d'abord d'une partie rectiligne très en pente suivie d'une boucle affectant, en gros, la forme d'une spire d'hélice. Le cycliste ne pédale pas, les deux roues sont folles. Il s'abandonne sans vitesse au haut de la pente rectiligne, entre à grande allure dans la boucle et en fait le tour sans tomber, maintenu par la force centrifuge.

Si nous considérons la trajectoire de son centre de gravité comme connue, nous pourrons assimiler approximativement le mouvement de ce centre de gravité à celui d'un point pesant qui se meut sur une courbe avec une résistance tangentielle proportionnelle au carré de la vitesse, car la résistance de l'air suit à très peu près cette loi.

1. Supposons donc, d'une façon générale, que les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe, rapportées à trois axes rectangulaires, l'axe Oz étant dirigé suivant la verticale ascendante, soient exprimées en fonction de l'arc s. Admettons, en outre, que le point se meuve dans le sens des s croissants et que, pour $t = 0$, t étant le temps, on ait $s = 0$. Soient γ, γ' les cosinus des angles que font la tangente à la courbe dans le sens des s croissants et la normale principale avec l'axe Oz. Si l'on désigne par ρ le rayon de courbure, on a, comme on sait,

$$\gamma = \frac{dz}{ds}, \qquad \frac{\gamma'}{\rho} = \frac{d\gamma}{ds}.$$

Le point, de masse m, est alors soumis à trois forces : son poids mg, la résistance tangentielle kv^2 et la réaction normale à la courbe dont nous nommerons R_n la composante suivant la normale principale.

Les projections sur la tangente et la normale principale donnent alors les deux équations suivantes :

$$(1) \qquad m\frac{dv}{dt} = -\,mg\gamma - kv^2,$$

$$(2) \qquad m\frac{v^2}{\rho} = -\,mg\gamma' + \mathrm{R}_n.$$

Supposons que l'on ait

$$z = f(s);$$

en remarquant alors que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds},$$

l'équation (1) s'écrit sous la forme

$$(3) \qquad \frac{d(v^2)}{ds} + av^2 = -\,2g\,f'(s),$$

$f'(s)$ étant la dérivée de $f(s)$ et posant

$$a = \frac{2k}{m}.$$

Cette équation (3) linéaire en v^2 s'intègre immédiatement par les procédés classiques et donne

$$(4) \qquad v^2 = -\,2ge^{-as}\int_0^s f'(s)e^{as}\,ds + v_0^2\,e^{-as},$$

v_0 désignant la vitesse initiale au temps $t = 0$. On a ainsi v en fonction de s et, comme $v = \frac{ds}{dt}$, on aurait t en fonction de s par une seconde quadrature.

Le problème est donc résolu, dans tous les cas, par deux quadratures.

2. Pour que le cycliste tienne sur la piste, il faut, en outre, que la valeur de R_n soit toujours positive, car il

décrit à peu près une géodésique sur cette piste. Or la formule (2) donne

$$R_n = m\left(\frac{v^2}{\rho} + g\gamma'\right)$$

ou

$$R_n = m\left(\frac{v^2}{\rho} + g\rho f''(s)\right),$$

$f''(s)$ étant la dérivée seconde de $f(s)$.

ρ étant positif, on doit donc avoir, à chaque instant,

$$v^2 + g\rho^2 f''(s) > 0$$

ou

$$(5)\qquad -2ge^{-as}\int_0^s f'(s)e^{as}\,ds + v_0^2 e^{-as} + g\rho^2 f''(s) > 0.$$

Le centre de gravité ne pourra donc parcourir que la portion de la courbe qui vérifiera cette inégalité (5).

3. Appliquons ceci au cas du cycliste. Il descend d'abord le long d'une ligne droite. Comptons le chemin parcouru s à partir du point le plus haut où la vitesse v_0 est nulle. On aura alors

$$f'(s) = -\cos\alpha,$$

α désignant l'angle aigu de la ligne avec l'axe Oz.

La valeur de v^2 fournie par la formule (4) devient alors

$$v^2 = 2ge^{-as}\cos\alpha\int_0^s e^{as}\,ds$$

ou

$$v^2 = \frac{2g\cos\alpha}{a}(1 - e^{-as}).$$

Cette formule montre que, à mesure que le cycliste descend, s croissant, sa vitesse v croît et tend asymptotiquement vers la valeur limite $\sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{a}}$. Son mouvement de descente tend donc à devenir uniforme.

4. En fait, il parcourt sur la pente un chemin de longueur connue l et arrive donc au bas avec la vitesse

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g\cos\alpha}{a}(1 - e^{-al})}. \tag{6}$$

C'est sa vitesse d'entrée dans la boucle.

Admettons alors que la boucle soit une hélice circulaire à axe horizontal

$$x = r\sin\theta, \qquad y = h\theta, \qquad z = r(1-\cos\theta),$$
$$s = \sqrt{h^2+r^2}\,\theta.$$

Le point d'entrée dans cette hélice n'est pas le point le plus bas où $\theta = 0$, mais un point voisin, et nous pourrons admettre, sans erreur sensible, pour des applications pratiques, que la vitesse de passage au point le plus bas est égale à v_0 [1]. L'équation (4) donne alors, dans ce cas,

$$v^2 = -2ge^{-b\theta}\int_0^\theta r\sin\theta\, e^{b\theta}\,d\theta + v_0^2 e^{-b\theta},$$

en posant

$$b = a\sqrt{h^2+r^2} = \frac{2k\sqrt{h^2+r^2}}{m}.$$

On en tire

$$v^2 = \frac{2gr}{1+b^2}(\cos\theta - b\sin\theta) + \left(v_0^2 - \frac{2gr}{1+b^2}\right)e^{-b\theta}.$$

Comme ici,

$$\rho = \frac{h^2+r^2}{r},$$

la condition (5) devient

$$\frac{2gr}{1+b^2}(\cos\theta - b\sin\theta)$$
$$+\left(v_0^2 - \frac{2gr}{1+b^2}\right)e^{-b\theta} + g\,\frac{r^2+h^2}{r}\cos\theta > 0$$

---

[1] En fait, elle est un peu supérieure à v_0 et, par suite, nous nous plaçons dans des conditions plus défavorables que la réalité.

et l'on en tire

$$(7)\quad v_0^2 > \frac{2gr}{1+b^2}\left(1 - \cos\theta\, e^{b\theta} + b\sin\theta\, e^{b\theta} - \frac{(r^2+h^2)(1+b^2)}{2r^2}\cos\theta\, e^{b\theta}\right).$$

Pour que le cycliste fasse le tour de la boucle sans encombre, il faut que cette inégalité soit vérifiée pour toutes les valeurs de θ de o à 2π. En égalant à zéro la dérivée de la quantité placée entre parenthèses, on trouve qu'elle s'annule pour la valeur θ_1 donnée par l'égalité

$$(8)\qquad \operatorname{tang}\theta_1 = \frac{b(r^2+h^2)}{3r^2+h^2}.$$

Dans l'intervalle o, 2π, il y a deux valeurs de θ_1 ; l'une, la plus petite, qui donne le minimum ; l'autre, la plus grande, qui donne le maximum du second membre de l'inégalité (7). Pour que l'inégalité (7) soit toujours vérifiée, il faut donc et il suffit qu'elle le soit pour la valeur θ_1 comprise entre π et $\frac{3\pi}{2}$ donnée par la formule (8). Cette valeur de θ_1 correspond au point critique de la course. Dans la pratique, b étant très petit, θ_1 est voisin de π et il suffira de vérifier largement l'inégalité (7) pour $\theta = \pi$.

D'ailleurs, si l'on y remplace v_0 par sa valeur (6), on aura une égalité qui pourrait déterminer la limite inférieure de l, c'est-à-dire de la distance que doit parcourir le cycliste dans la descente rectiligne pour pouvoir passer la boucle.

5. Nous avons supposé, dans l'étude précédente, que la forme de la boucle était celle d'une hélice circulaire. En pratique, cette forme serait désavantageuse et même dangereuse pour le cycliste. En effet, dans la descente rectiligne, la réaction est constante et égale à la compo-

sante normale du poids. Lorsque le centre de gravité pénètre dans la partie hélicoïdale de sa trajectoire, le rayon de courbure ρ, d'abord infini, prend brusquement une valeur finie. La réaction augmente brusquement de la quantité $\frac{mv_0^2}{\rho}$; il en est donc de même de la pression de la machine sur la piste. A la sortie de la boucle, les choses se passeraient en ordre inverse et la pression diminuerait brusquement d'une quantité notable. Or, comme la bicyclette repose par *deux* points sur la piste, la pression se partage sur ces deux appuis et l'augmentation ou diminution de pression se ferait d'abord sur la roue d'avant et ensuite sur la roue d'arrière. Ceci équivaudrait donc à un choc qui pourrait faire basculer l'acrobate. Pour y remédier, il faut donc substituer à l'hélice une courbe dont le rayon de courbure, d'abord infini à l'entrée, décroît d'une façon continue jusqu'à un minimum au haut de la boucle pour reprendre ensuite les mêmes valeurs en sens inverse et redevenir infini à la sortie. Dans cet ordre d'idées, la trajectoire la plus avantageuse serait celle pour laquelle R_n resterait constante.

D'une façon plus précise, il faudrait donc trouver une courbe telle que, pour $s = 0$, on ait $\frac{1}{\rho} = 0$ et qu'en outre, lorsqu'elle est décrite par un point matériel, la composante R_n reste constante.

Ce problème admet, comme il est facile de le voir, une infinité de solutions dont chacune ne dépend que de quadratures.

Si, en effet, on se donne arbitrairement z en fonction de s, c'est-à-dire $f(s)$, ainsi que la constante v_0, v^2 est parfaitement déterminé en fonction de s par la formule (4).

En posant alors

$$R_n = Cm$$

on a, pour déterminer ρ, l'équation du second degré en $\frac{1}{\rho}$

$$\frac{v^2}{\rho^2} - \frac{C}{\rho} + g f''(s) = 0. \tag{9}$$

Pour que $\frac{1}{\rho} = 0$ pour $s = 0$, il suffira que $f(s)$ soit tel que

$$f''(0) = 0,$$

et, en outre, l'équation (9) devra avoir des racines réelles, ce qui est possible pour C assez grand.

On est alors ramené au problème de Géométrie suivant :

Déterminer une courbe gauche connaissant z et ρ en fonction de s.

On aura, pour déterminer x et y, les deux équations différentielles

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = F^2(s),$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} - \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \Phi^2(s),$$

$F(s)$ et $\Phi(s)$ étant des fonctions connues de s.

Ce système s'intègre facilement par des quadratures, car, si l'on pose

$$\frac{dx}{ds} = F(s)\cos u, \qquad \frac{dy}{ds} = F(s)\sin u,$$

on a

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = F'^2(s) + F^2(s)\left(\frac{du}{ds}\right)^2.$$

Par suite, u s'obtient par une quadrature, en fonction de s, par l'égalité

$$F'^2(s) + F^2(s)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \Phi^2(s);$$

et, u étant connu, on aura x et y en fonction de s par deux nouvelles quadratures.