NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 3 (1903), p. 141-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1903_4_3__141_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1951.

(1902, p. 576.)

Trouver les courbes telles que la distance de l'origine à la tangente soit proportionnelle à la normale limitée à l'axe. (A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. H. AMSTEIN.

Si les coordonnées sont rectangulaires, la distance de l'origine à la tangente au point (x, y) à une des courbes cherchées est donnée par l'expression

$$\frac{y - px}{\sqrt{1 + p^2}}$$

et la normale au même point par

$$y\sqrt{1 + p^2},$$

où

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

L'équation différentielle des courbes demandées est ainsi

$$y - px = my(1 + p^2), \tag{1}$$

où m signifie un nombre réel quelconque.

Pour l'intégrer, on la différentie d'abord, ce qui donne

$$dy - p\,dx - x\,dp = m(1 + p^2)\,dy + 2mpy\,dp.$$

Afin de débarrasser cette dernière équation de la variable x, on y remplacera x par sa valeur tirée de (1), et dx par $\frac{dy}{p}$. Il vient, tous calculs faits,

$$\frac{dy}{y} = \frac{m - 1 - mp^2}{mp(1+p^2)}\, dp.$$

L'intégration de cette équation différentielle n'offre aucune difficulté, et l'on obtient immédiatement

$$\log\frac{y}{C} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\log p + \frac{1-2m}{2m}\log(1+p^2),$$

d'où, en passant des logarithmes aux nombres,

$$(2) \qquad y = Cp^{1-\frac{1}{m}}(1+p^2)^{\frac{1-2m}{2m}}.$$

La valeur correspondante de x est fournie par (1). Elle est

$$(3) \qquad x = \frac{C(1+p^2)^{\frac{1-2m}{2m}}\,[1 - m(1+p^2)]}{p^{\frac{1}{m}}}.$$

Les équations (2) et (3), dans leur ensemble, constituent l'intégrale générale de l'équation différentielle (1). Elles sont, en effet, une représentation paramétrique des courbes cherchées. En y substituant $p = \operatorname{tang}\alpha$, elles prennent la forme

$$x = C\frac{\cos^2\alpha - m}{(\sin\alpha)^{\frac{1}{m}}},$$
$$y = C(\sin\alpha)^{1-\frac{1}{m}}\cos\alpha.$$

Cas particuliers :

a. Pour $m = 1$ on obtient la circonférence

$$x = -C\sin\alpha,$$
$$y = C\cos\alpha \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 = C^2.$$

b. La valeur $m = -1$ conduit aux équations

$$x = C\sin\alpha(1+\cos^2\alpha),$$
$$y = C\sin^2\alpha\cos\alpha$$

ou bien à l'équation unique qu'on en tire par l'élimination de α

$$(x^2+y^2)^3 - C^2(x^4 + 20x^2y^2 - 8y^4) + 16\,C^4y^2 = 0.$$

La courbe du sixième degré représentée par cette équation a quatre points de rebroussement de première espèce dont les coordonnées sont respectivement

$$x = \pm \frac{4}{9}\sqrt{6}\,C, \qquad y = \pm \frac{2}{9}\sqrt{3}\,C,$$

et les coefficients angulaires des tangentes en ces points sont respectivement

$$\tan g\alpha = \pm\sqrt{2}.$$

c. Pour $m = \frac{1}{2}$ la courbe cherchée est la parabole

$$x = C\,\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha},$$

$$y = C\cos 9\alpha = C\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$$

ou

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{1}{2}C\right).$$

Autres solutions par MM. Barisien et Couvert.