Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 89-95

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__89_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1865.

(1900, p. 384.)

Si un hyperboloïde circonscrit à un tétraèdre orthocentrique passe aussi par l'orthocentre, il admet des systèmes de trois génératrices rectangulaires, et inversement.

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par un abonné.

Soit un tétraèdre ABCD pour lequel il existe un point E tel que chacun des cinq couples de plans

$$\begin{cases}(\overline{\mathrm{BC}}\mathrm{E},\ \overline{\mathrm{DA}}\mathrm{B}),\\(\overline{\mathrm{BC}}\mathrm{E},\ \overline{\mathrm{DA}}\mathrm{C}),\end{cases}\qquad\begin{cases}(\overline{\mathrm{CA}}\mathrm{E},\ \overline{\mathrm{DB}}\mathrm{C}),\\(\overline{\mathrm{CA}}\mathrm{E},\ \overline{\mathrm{DB}}\mathrm{A}),\end{cases}\qquad(\overline{\mathrm{AB}}\mathrm{E},\ \overline{\mathrm{DC}}\mathrm{A})$$

soit formé de deux plans rectangulaires (deux conditions). Chacun de ces cinq couples de plans constitue un hyperboloïde équilatère passant par les cinq points A, B, C, D, E;

les équations de ces quadriques étant $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, ..., $S_5 = 0$, l'équation générale des quadriques passant par ces cinq points est, avec quatre paramètres,

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots + \lambda_5 S_5 = 0,$$

et il est bien évident que ces quadriques sont des hyperboloïdes équilatères, puisque la condition pour une quadrique d'être un hyperboloïde équilatère est linéaire par rapport aux coefficients de son équation ponctuelle. En particulier, si l'on prend un quelconque des cinq points, soit le point E, les deux plans EDA, EBC, par exemple, sont rectangulaires, ce qui donne les propriétés du tétraèdre orthocentrique. Inversement, si une quadrique passant en A, B, C, D est de plus équilatère, comme les cinq conditions sont linéaires par rapport aux coefficients de l'équation ponctuelle de la quadrique, cette équation renferme quatre paramètres au premier degré, et se confond par suite avec celle des quadriques qui passent par les cinq points A, B, C, D, E.

Remarque. — Ce théorème est énoncé et démontré dans les *Premiers principes de Géométrie moderne* de M. Duporcq, page 105.

1866.

(1900, p. 384.)

Soit Q *la conique inscrite en* A, B, C *au triangle* $A_1 B_1 C_1$.

I. *Si par* A_1 *on mène une droite quelconque qui coupe* $B_1 C_1$ *en* I_1, CA *en* H *et* AB *en* K, *le point* ω(BH, CK) *appartient à* Q *et* ωI_1 *est la tangente en* ω.

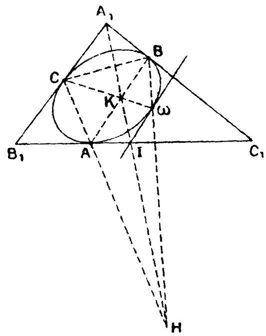
II. P *étant un point quelconque de* BC, *si* PB_1 *et* PC_1 *coupent* $C_1 A_1$ *et* $A_1 B_1$ *en* H_1 *et* K_1, *la droite* $H_1 K_1$ *est tangente à* Q *et* PA *la rencontre au point de contact* ω_1.

(P. Sondat.)

SOLUTION

Par M. Nicolai, à Pistoia.

I. La conique lieu des points communs aux rayons homologues de deux faisceaux homographiques C(A, ω, A_1), B(A, ω, C), passe par les points A, B, C, ω, touche CA_1 et BA_1 en C et en B_1 car les deux faisceaux formeut sur la



transversale A_1H une involution, les points H et K se correspondant doublement.

D'après un cas particulier du théorème inverse de Pascal, on voit encore immédiatement que ω appartient à Q, et du théorème direct on déduit que ωI_1 est la tangente en ω.

II. Le premier théorème transformé par dualité fournit le deuxième.

Autres solutions par MM. Retali et Vacquant.

1868.

(1900, p. 431.)

Lieu des centres des coniques dont on connaît le centre de courbure en un point donné, ainsi que la somme des carrés des axes. (E Duporcq.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Lorsqu'un triangle circonscrit à une conique devient évanouissant, le cercle conjugué à ce triangle devient un cercle tangent extérieurement à la conique et dont le diamètre est égal au rayon de courbure au point de contact; ou encore, comme l'a remarqué P. Serret (*Nouv. Ann.*, 1861, p. 80), lorsqu'un triangle conjugué à une conique devient évanouissant, le cercle circonscrit au triangle devient un cercle tel que le précédent. Le théorème de Steiner, ou celui de Faure, donne donc l'énoncé suivant, qui a été proposé comme question par Steiner (*Nouv. Ann.*, 1849, p. 393) :

Le cercle tangent extérieurement à une conique, et dont le diamètre est égal au rayon de courbure au point de contact, coupe orthogonalement le cercle orthoptique.

M. Ploix a donné une démonstration directe de cette propriété (*Nouv. Ann.*, 1850, p. 59) en rappelant que Poncelet avait déjà donné le cas particulier de la parabole. Si le point de contact M est donné ainsi que le centre de courbure C en ce point, en appelant K le symétrique de C par rapport à M, le lieu du centre de la conique est un cercle ayant pour centre le milieu de MK.

P. Serret *a étendu à l'espace* la remarque rappelée plus haut (*Nouv. Ann.*, 1861, p. 82); en précisant un peu son énoncé, on a eu : Lorsqu'un tétraèdre conjugué à une quadrique devient évanouissant, la sphère circonscrite au tétraèdre devient une sphère tangente à la quadrique, le diamètre MK issu du point de contact M étant déterminé par la relation

$$\overline{\mathrm{MK}} = -(\overline{\mathrm{MC}_1} + \overline{\mathrm{MC}_2}),$$

où C_1 et C_2 sont les centres de courbure principaux en M_1. On peut dire encore : Lorsqu'un tétraèdre orthocentrique circonscrit à une quadrique devient évanouissant, la sphère conjuguée au tétraèdre devient une sphère telle que la précédente.

Il résulte alors du théorème de Faure étendu à l'espace, ou du théorème de Steiner étendu à l'espace avec un tétraèdre orthocentrique, qu'*une sphère définie comme ci-dessus est orthogonale à la sphère orthoptique de la quadrique.* Ce dernier fait, qui entraîne les précédents, est susceptible d'une démonstration directe analogue à celle de M. Ploix. Si l'on considère la sphère qui est tangente en M à la quadrique et qui est orthogonale à la sphère orthoptique, le diamètre OM de la quadrique coupant encore cette sphère en N, on a

$$\overline{\mathrm{ON}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\overline{\mathrm{OM}}},$$

γ étant OM, α et β étant les demi-axes de la section centrale de la quadrique faite parallèlement au plan tangent en M; on a donc

$$\overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{ON}} - \overline{\mathrm{OM}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\overline{\mathrm{OM}}};$$

si MK est le diamètre de la sphère, et si OP est la perpendiculaire menée de O sur le plan tangent en M, on a

$$\overline{\mathrm{OM}} \times \overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{MK}} \times \overline{\mathrm{OP}},$$

et par suite

$$\overline{\mathrm{MK}} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\overline{\mathrm{OP}}};$$

on doit donc avoir

$$\overline{\mathrm{MC_1}} + \overline{\mathrm{MC_2}} = \frac{\alpha^2}{\overline{\mathrm{PO}}} + \frac{\beta^2}{\overline{\mathrm{PO}}};$$

et cela a lieu *terme à terme*.

Autre solution, par M. E.-N. BARISIEN.

1870.

(1900, p. 432.)

On considère la figure plane qui est la projection de la figure de l'espace formée par cinq plans a, b, c, d, e; on désigne par (ab) la droite qui est la projection de l'intersection des plans a et b et par (A, B) *le point qui est l'intersection des plans autres que a et b. Montrer qu'il existe une conique telle que chacune des droites de la figure est la polaire du point correspondant.* (G. FONTENÉ.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Considérons la figure corrélative : nous avons cinq points (dont quatre quelconques ne sont pas dans le même plan) sommets d'un pentagone gauche ayant dix couples d'éléments *opposés* (à la droite qui joint deux points est *opposé* le plan des trois autres points). Ces dix couples d'éléments opposés sont coupés par un plan arbitraire (ne passant par aucun des sommets du pentagone) suivant dix couples d'éléments conjugués d'un système polaire [*voir,* par exemple ([1]), Reye, *Géométrie de position,* t. II, p. 79 de la traduction française]. Le théorème corrélatif dans l'espace est : En projetant les dix couples d'éléments opposés (droites et points) d'un pentaèdre, d'un point arbitraire (non situé sur aucune des faces du pentaèdre), on obtient dix couples d'éléments conjugués (plans et rayons) d'une *gerbe polaire.* En coupant cette gerbe par un plan π, on obtient le théorème proposé.

Il y a un nombre doublement infini de cubiques gauches dont les plans a, b, c, d, e sont osculateurs; les trois plans osculateurs menés à une quelconque de ces cubiques par un point arbitraire coupent le plan π suivant un trilatère conjugué à la conique, etc.

1877.

(1900, p. 571.)

On donne un triangle CAB. *Sur* AB, AC *comme demi-diamètres conjugués on construit une ellipse* (E); *sur* AB, BC *on construit pareillement une seconde ellipse* (E'). *Étudier les intersections des deux ellipses* (E), (E').

(C.-A. Laisant.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

En appelant D et E les points symétriques de C par rapport à A et B, les deux ellipses sont respectivement tangentes à la droite |DE| aux points D et E, et au point C elles ont pour tangente la parallèle à |AB|; elles ont en ce point C un contact du deuxième ordre et se coupent sur la médiane du triangle ABC issue de C. Si a, b, c sont les longueurs des côtés de ABC, les équations de (E), (E') rapportées aux axes obliques AB, AC, sont respectivement

$$(E) \equiv b^2x^2 + c^2y^2 - b^2c^2 = 0,$$
$$(E') \equiv (bx + cy)^2 - 2bc(bx + cy) + c^2y^2 = 0$$

et, par suite,

$$(E') - (E) = c(y - b)(2bx + cy - bc),$$

([1]) On peut consulter aussi : E. Duporcq, *Premiers principes de Géométrie moderne.* p. 141. Gauthier-Villars, 1899.

$y - b = 0$ est la tangente commune au point C;

$$2bx + cy - bc = 0$$

est la médiane issue de C; donc (E), (E′) s'osculent au point C et se coupent au point $\left(\frac{4c}{5}, -\frac{3b}{5}\right)$.

Autres solutions de MM. E.-N. Barisien et Valdès.

1900

(1900, p. 575.)

On considère deux points fixes A *et* B *et un cercle décrit du milieu* O *de* AB *comme centre avec un rayon égal à* $OA\sqrt{3}$. *Montrer que pour un point* C *quelconque de ce cercle le triangle* ABC *jouit de cette propriété que l'axe radical de son cercle des neuf points* (et du cercle circonscrit) *est parallèle à la médiane* OC.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Appelons H l'orthocentre, M le centre du cercle des neuf points, G le barycentre, ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC : ces quatre points étant une ligne droite, il suffit de démontrer que HG est perpendiculaire à la médiane OC. Soit C′ la projection de C sur AB, et posons $AO = a$: comme les points C et H sont conjugués au cercle de centre O et rayon a, nous avons

$$C'H.C'C = \overline{CC'}^2 - CH.C'C = a^2 - \overline{OC'}^2$$

et, par suite,

$$CH.CC' = \overline{OC}^2 - a^2 = 2a^2;$$

mais

$$CG.CO = \tfrac{2}{3}\,\overline{CO}^2 = 2a^2,$$

donc

$$CH.CC' = CG.CO$$

et le théorème est démontré.

Autre solution de M. Lez.