NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Sur la résolution nomographique des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 49-57

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__49_0>

[X3a]

SUR LA RÉSOLUTION NOMOGRAPHIQUE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

C'est à l'occasion de cette résolution que nous avons énoncé pour la première fois ([1]) en 1884 le principe de la *méthode des points alignés,* qui se trouve exposée très en détail dans les Chapitres III et V de notre *Traité de Nomographie* ([2]). Or, cette application particulière peut être dégagée de la théorie générale à laquelle elle se rattache pour être présentée sous la forme suivante immédiatement accessible à tout élève de Mathématiques spéciales.

I. — SYSTÈMES DE POINTS A UNE ET A DEUX COTES.

1. Si les coordonnées d'un point sont données en fonctions d'un paramètre z par des formules telles que

$$x = f(z), \qquad y = \varphi(z),$$

on peut figurer un certain nombre de ces points correspondant à des valeurs de z comprises entre certaines limites *en inscrivant à côté de chacun d'eux la valeur de z qui a servi à l'obtenir*. On a ainsi un système de *points à une cote.* Ces points sont distribués sur la ligne, dite leur *support,* dont l'équation s'obtiendrait

([1]) *Annales des Ponts et Chaussées,* 2e semestre, p. 531. Cette Note a été reproduite dans notre brochure : *Coordonnées parallèles et axiales,* p. 73 (Paris, Gauthier-Villars; 1885).

([2]) Paris, Gauthier-Villars; 1899.

par l'élimination de z entre les expressions de x et y. Si les fonctions $f(z)$ et $\varphi(z)$ dépendent linéairement l'une de l'autre, ce support est une ligne droite.

2. Considérons de même un point dont les coordonnées dépendent de deux paramètres z et t par les formules

$$x = f(z, t), \qquad y = \varphi(z, t).$$

Si l'on donne à t une certaine valeur fixe, on obtient un système de points distribués sur une ligne (t) dont l'équation résulterait de l'élimination de z entre les expressions de x et y. De même, en laissant z fixe et faisant varier t, on obtient une ligne (z). Ayant construit un certain nombre de lignes (z) et (t), en ayant soin d'inscrire sa cote à côté de chacune d'elles, on a un réseau dans lequel chaque point est défini par les cotes des lignes (z) et (t) qui s'y croisent. Ces points sont dits des *points à deux cotes*.

Indépendamment des points effectivement marqués dans un système, soit à une, soit à deux cotes, on peut, par interpolation à vue, se figurer ceux qui correspondent à des cotes intermédiaires.

II. — Résolution des équations de la forme $z^m + uz^p + v = 0$.

3. Une telle équation peut s'écrire (¹)

$$\begin{vmatrix} -1 & u & 1 \\ 1 & v & 1 \\ 1 - z^p & -z^m & 1 + z^p \end{vmatrix} = 0.$$

(¹) Comme on peut s'en assurer en se reportant aux endroits cités, c'est l'usage des coordonnées tangentielles spéciales que nous avons appelées *parallèles* qui conduit le plus naturellement à cette transformation.

Elle exprime l'alignement des trois points

$$
\begin{array}{lll}
(u) & x = -1, & y = u, \\
(v) & x = 1, & y = v, \\
(z) & x = \dfrac{1 - z^p}{1 + z^p}, & y = \dfrac{-z^m}{1 + z^p}.
\end{array}
$$

Ces trois couples de formules définissent trois systèmes à une cote, savoir : les points (u) et (v) distribués sur deux parallèles équidistantes de Oy, les points (z) distribués sur une courbe algébrique C définie par les expressions correspondantes de x et y.

Il est d'ailleurs facile, par l'élimination de z, de former l'équation de cette courbe d'ordre m, qui est

$$(-2y)^p(1+x)^{m-p} = (1-x)^m.$$

L'ensemble des trois systèmes à une cote (u), (v) et (z) constitue un *nomogramme* (¹) *à points alignés* de l'équation donnée. Pour résoudre l'équation au moyen de ce nomogramme, on voit qu'il suffit de *joindre les points cotés u et v par une droite qui coupe la courbe* C *en des points dont les cotes z sont les racines de l'équation.*

Remarquons qu'il suffit de construire les points de la courbe C pour des valeurs positives de z, les valeurs absolues des racines négatives de l'équation s'obtenant immédiatement comme racines positives de la transformée en $-z$.

4. Prenons en particulier l'équation générale du second degré

$$z^2 + uz + v = 0,$$

(¹) Terme étymologiquement plus général que celui d'*abaque*, auquel il a été substitué par M. Schilling.

qui rentre dans le type précédent lorsqu'on y fait $m = 2$, $p = 1$.

Si nous appelons AA′ et BB′ les droites $x = -1$ et $x = 1$ qui servent, dans tous les cas, de supports aux systèmes (u) et (v), droites qui rencontrent l'axe Ox aux points A et B, on voit que la courbe C, dont l'équation, donnée ci-dessus, devient ici

$$-2y(1+x) = (1-x)^2,$$

est une hyperbole tangente en B à Ox, ayant AA′ pour asymptote et coupant l'axe Oy au point d'ordonnée $y = -\frac{1}{2}$, ce qui la définit complètement. D'ailleurs, les expressions de x et de y, qui sont ici

$$x = \frac{1-z}{1+z}, \qquad y = \frac{-z^2}{1+z},$$

montrent : 1° que la portion de l'hyperbole C correspondant aux valeurs positives de z est tout entière au-dessous de Ox, entre AA′ et BB′; 2° que le pied M de l'ordonnée du point P coté z divise AB dans le rapport $\frac{\text{MB}}{\text{AM}} = z$; 3° que la droite BP coupe AA′ en un point dont l'ordonnée est $y = -z$.

Ces deux dernières propriétés donnent une construction facile des points (z). C'est ainsi qu'a été obtenu le nomogramme représenté par la figure 1.

III. — Résolution des équations de la forme $z^m + t z^n + u z^p + v = 0$.

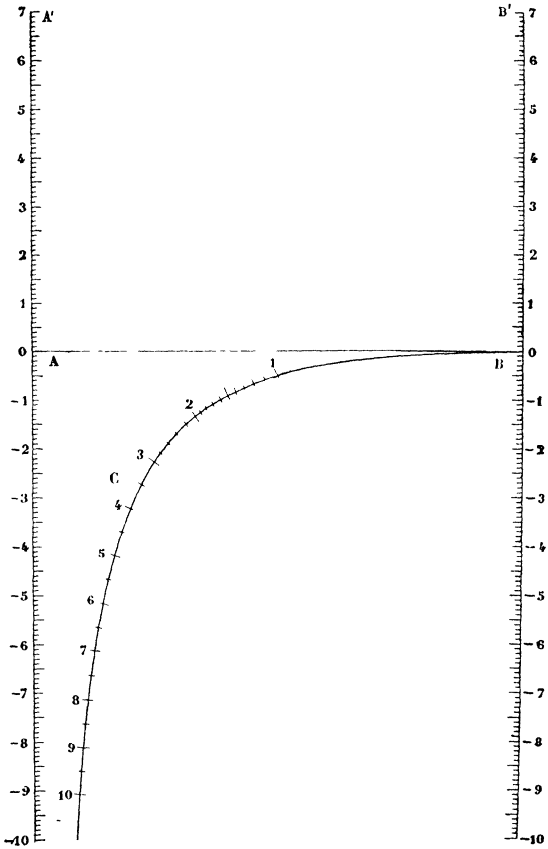
5. Une telle équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} -1 & u & 1 \\ 1 & v & 1 \\ 1-z^p & z^m + t z^n & 1+z^p \end{vmatrix} = 0.$$

Elle exprime l'alignement des trois points

$$
\begin{array}{lll}
(u) & x = -1, & y = u, \\
(v) & x = 1, & y = v, \\
(z, t) & x = \dfrac{1 - z^p}{1 + z^p}, & y = \dfrac{-(z^m + t z^n)}{1 + z^p}.
\end{array}
$$

Fig. 1.



Les points à une cote (u) et (v) sont les mêmes que dans le cas précédent. Ils sont distribués sur les parallèles $AA'(x = -1)$ et $BB'(x = 1)$ à Oy.

Les points (z, t) sont à deux cotes. Mais on peut observer que, l'expression de leur x ne renfermant pas t, les lignes (z) du réseau (z, t) sont tout simplement des parallèles à Oy. En outre, les courbes C_t, d'ordre m, correspondant aux diverses valeurs de t, se déduisent très facilement de celle d'entre elles, C_0, qui correspond à $t = 0$, et qui n'est autre que la courbe C du n° 3.

En effet, les points des diverses courbes C_t situés sur une même parallèle (z) à Oy sont donnés par

$$y = \frac{-z^m}{1-z^p} - t\frac{z^q}{1-z^p},$$

ou, en appelant y_0 l'ordonnée du point de C_0 situé sur cette ligne (z) et remarquant que $\frac{-z^q}{1-z^p}$ est une constante η_1 par rapport à cette ligne z,

$$y = y_0 + t\eta_1.$$

Ayant donc calculé les η_1 correspondant aux diverses valeurs de z, on voit que, une fois tracée la courbe C_0, la construction des autres courbes C_t est immédiate.

L'ensemble des points à une cote (u) et (v) et des points à deux cotes (z, t) définis par le réseau des parallèles (z) à Oy et des courbes C_t, constitue le *nomogramme* de l'équation proposée.

Quand ce nomogramme est construit, on résout l'équation en *joignant par une droite les points cotés u et v et prenant les cotes z des parallèles à Oy passant par les points où cette droite coupe la courbe C_t.*

Comme dans le cas précédent, on remarquera que l'on peut se borner à construire le nomogramme pour les valeurs positives de z.

6. Prenons en particulier l'équation complète du

troisième degré [1]

$$z^3 + t z^2 + u z + v = 0,$$

qui rentre dans le type précédent quand on y fait $m = 3$, $n = 2$, $p = 1$.

Les points (u) et (v) sont les mêmes que précédemment, distribués sur les droites AA′ et BB′; quant aux courbes C_t, elles sont définies par les équations

$$x = \frac{1 - z}{1 + z}, \qquad y = -\frac{z^3 - t z^2}{1 - z}.$$

La première de ces équations définit d'ailleurs les lignes (z), qui ne sont autres que les parallèles à Oy menées par les points (z) du nomogramme du n° 4 (*fig.* 1).

Pour obtenir sur chacune de ces lignes (z) les points des diverses courbes C_t, il suffit, après avoir posé

$$y_0 = \frac{-z^3}{1 - z}, \qquad \eta = \frac{-z^2}{1 + z},$$

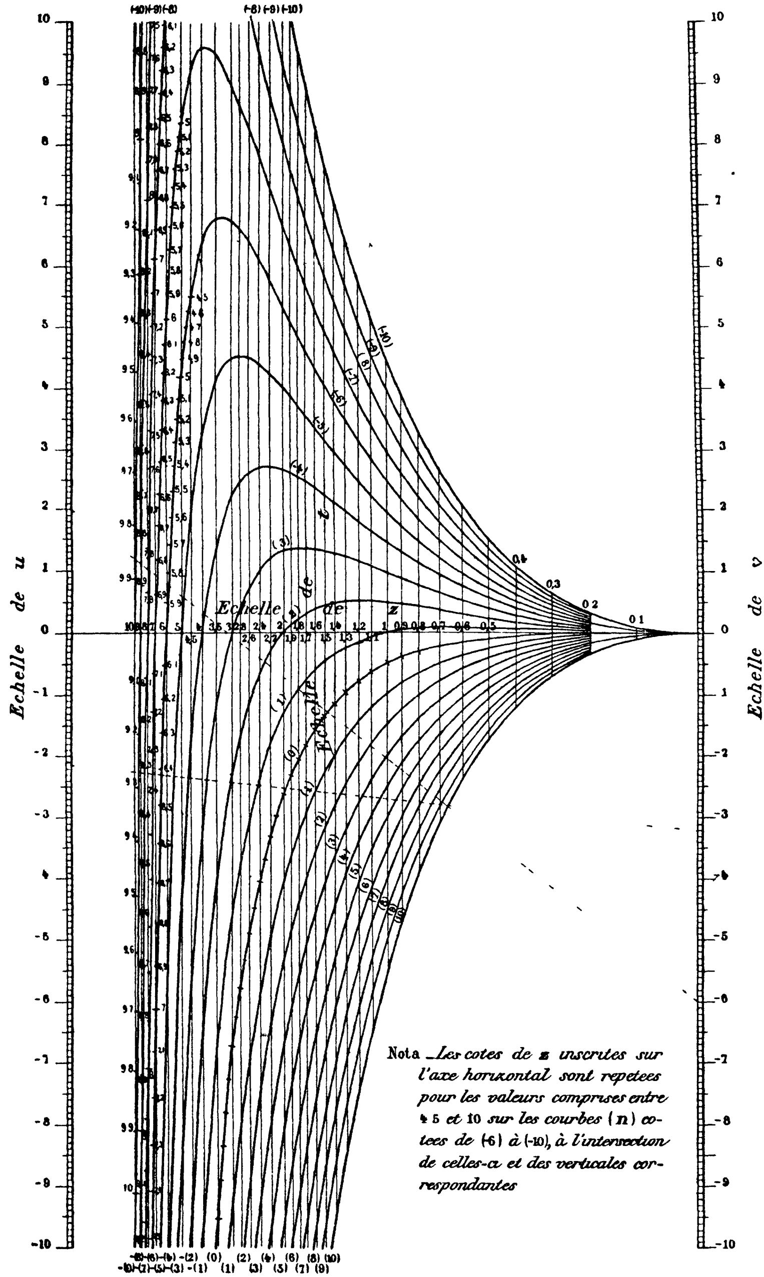
de remarquer, comme on vient de le faire dans le cas général, que, une fois construite, la courbe C_0 définie par l'ordonnée y_0, on a, sur chaque ligne (z), les points des courbes correspondant à $t = 1, 2, 3, \ldots$ en ajoutant à l'ordonnée y_0, une fois, deux fois, trois fois, ... l'ordonnée η qui n'est autre que celle de l'hyperbole construite pour le nomogramme précédent.

La courbe C_0 est d'ailleurs une cubique cuspidale ayant son point d'inflexion en B, où la tangente se con-

---

(1) Pour l'extension de la méthode jusqu'au septieme degré, *voir* les Notes que nous avons publiées dans les *Comptes rendus* (t. CXXXI, p. 522) et le *Bull. des Sc. math.* (2e série, t. XXIV, p. 286).

Fig 2


Echelle de u
Echelle de v
Echelle de z
Echelle de t
Nota _Les cotes de z inscrites sur l'axe horizontal sont repetees pour les valeurs comprises entre 4 5 et 10 sur les courbes (n) cotees de (-6) à (-10), à l'intersection de celles-ci et des verticales correspondantes

fond avec Ox, et son point de rebroussement à l'infini sur la partie négative de AA' [1].

C'est ainsi qu'a été obtenu le nomogramme représenté par la figure 2, sur laquelle on a indiqué en pointillé les positions de l'index se rapportant à la résolution des équations

$$z^3 + 2z - 6 = 0, \qquad z^3 + z^2 - 2,16z - 3,2 = 0,$$

pour lesquelles le nomogramme donne respectivement

$$z = 1,46 \quad \text{et} \quad z = 1,6.$$

Remarque. — On peut, pour construire le système (t), porter sur chaque droite (z) les ordonnées η à partir de l'une quelconque des courbes C_t, tracée d'abord. En particulier, on peut partir de la courbe C_1 définie par l'ordonnée

$$y = -\frac{z^3 + z^2}{1 + z} = -z^2,$$

que fournit immédiatement une simple Table de carrés.