E. DUPORCQ

Sur une note de M. Fréchet

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 482-485

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__482_1>

[P5]

SUR UNE NOTE DE M. FRÉCHET;

PAR M. E. DUPORCQ.

Dans une Note récemment publiée dans ce Recueil (p. 446), M. Fréchet a établi que :

Si trois surfaces se correspondent point par point, il existe, en général, quatre systèmes de courbes correspondantes isogonales.

Ces quatre systèmes de courbes ont entre eux des relations assez remarquables, qu'on peut mettre en évidence de la manière suivante.

Si m_1, m_2 et m_3 sont trois points correspondants sur les trois surfaces S_1, S_2 et S_3, les tangentes aux courbes correspondantes passant par ces points, forment, comme le remarque M. Fréchet, trois faisceaux homographiques : à chaque groupe de trois rayons homologues on peut faire correspondre de manière univoque un point d'une conique Γ, de sorte que le rapport anharmonique de quatre rayons de chaque faisceau soit égal à celui des quatre points correspondants sur Γ.

Soient i_1 et j_1 les points de Γ qui correspondent ainsi aux tangentes isotropes menées à S_1 au point m_1, i_2 et j_2, i_3 et j_3 les points analogues par rapport aux surfaces S_2 et S_3. A trois couples de tangentes correspondantes sur les trois surfaces correspondent sur Γ, si les angles de ces couples sont égaux, deux points, α et β, tels que les rapports anharmoniques

$$(\alpha\beta i_1 j_1), \quad (\alpha\beta i_2 j_2), \quad (\alpha\beta i_3 j_3),$$

par exemple, soient égaux. Ces points sont donc les points doubles de l'homographie définie sur Γ par les trois couples :

$$i_1 j_1, \quad i_2 j_2, \quad i_3 j_3;$$

ce sont donc les points de contact de l'une, C, des coniques bitangentes à Γ et touchant les droites $i_1 j_1$, $i_2 j_2$ et $i_3 j_3$. Or, on sait qu'il existe trois autres coniques jouissant de cette propriété; soient C_1, C_2 et C_3 ces coniques, C_1, par exemple, touchant Γ aux points α_1 et β_1 tels que

$$(\alpha_1 \beta_1 j_1 i_1) = (\alpha_1 \beta_1 i_2 j_2) = (\alpha_1 \beta_1 i_3 j_3).$$

Or, il est facile de déduire ces points α_1 et β_1 des points α et β précédemment obtenus; on voit, en effet, sans difficulté que les droites $\alpha\beta$ et $\alpha_1\beta_1$ se coupent sur la droite $i_1 j_1$ et qu'elles divisent harmoniquement les segments $i_2 j_2$ et $i_3 j_3$.

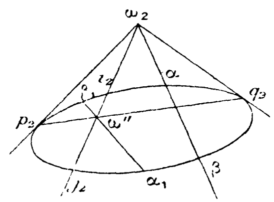
Soient donc A_1, A_2 et A_3 les trois angles égaux correspondants, de sommets m_1, m_2 et m_3, associés au couple $\alpha\beta$; A'_1, A'_2 et A'_3 les angles analogues qui correspondent au couple $\alpha_1\beta_1$; les notations A'' et A''' désignant de même les angles associés aux couples $\alpha_2\beta_2$ et $\alpha_3\beta_3$.

De ce que $\alpha\beta$ et $\alpha_1\beta_1$ se coupent sur $i_1 j_1$, on déduit d'abord que les trois couples

$$\alpha\beta, \quad \alpha_1\beta_1, \quad i_1 j_1$$

sont en involution sur Γ. Par suite, les côtés des angles A_1, A'_1 et les droites isotropes tangentes en m_1 à S_1 sont en involution : autrement dit, *les angles* A_1 *et* A'_1 *ont les mêmes bissectrices;* il en est de même des angles A_2 et A''_2, A_3 et A'''_3, A''_1 et A'''_1, A'_2 et A'''_2, A'_3 et A''_3.

Interprétons maintenant la propriété des droites $\alpha\beta$ et $\alpha_1\beta_1$ de diviser harmoniquement le segment $i_2 j_2$:



soient ω_2 et ω'' les points où elles coupent la droite $i_2 j_2$: ω'' est sur la polaire $p_2 q_2$ de ω_2; par conséquent, les couples

$$i_2 j_2, \quad p_2 q_2, \quad \alpha_1 \beta_1$$

sont en involution; or, p_2 et q_2 sont les points doubles de l'involution

$$\alpha\beta, \quad i_2 j_2.$$

A ces points correspondent donc, autour de m_2, les bissectrices de l'angle A_2, et celles-ci déterminent avec les côtés de l'angle A'_2 une involution comprenant les droites isotropes; autrement dit, l'angle A'_2 a les mêmes bissectrices que l'angle formé par les bissectrices de l'angle A_2, ou encore, *les angles* A_2 *et* A'_2 *ont leurs bissectrices inclinées à* 45°.

En résumé, si l'on se fixe sur S_1, S_2 et S_3 autour des points m_1, m_2 et m_3 des sens de rotation positifs, il existera seulement un système de trois angles correspondants égaux A_1, A_2 et A_3. On en obtiendra un autre, A'_1, A'_2 et A'_3, en changeant le sens de rotation autour de m_1, et deux autres analogues, A''_1, A''_2, A''_3 et A'''_1,

A''''_2, A'''_3, en changeant le sens de rotation respectivement autour de m_2 et de m_3. *Les quatre angles obtenus ainsi autour de chaque point auront deux à deux les mêmes bissectrices, et les deux systèmes de bissectrices obtenus feront entre eux des angles de* 45°. Le Tableau suivant indique la manière d'associer les angles : dans chacun des trois groupes formés, les angles inscrits sur une même ligne ont deux à deux les mêmes bissectrices :

$$A_1\,A'_1,\quad A_2\,A''_2,\quad A_3\,A'''_3,$$
$$A''_1\,A'''_1,\quad A'_2\,A'''_2,\quad A'_3\,A''_3.$$