Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 465-468

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__465_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie élémentaire des séries. Limites. Séries à termes constants. Séries à termes variables. Fonction exponentielle. Fonctions circulaires. Fonction gamma; par M. *Godefroy* (Maurice), bibliothécaire de la Faculté

des Sciences de Marseille. Grand in-8° de VIII-266 pages avec figures; 1903.

On sait l'importance de plus en plus grande que les séries tendent à prendre en Analyse et cela tient, sans doute, à ce qu'elles constituent un instrument de calcul d'une singulière puissance, se prêtant, en outre, avec une égale souplesse, aux exigences de la rigueur et de la simplicité. M. Godefroy a donc fait une œuvre des plus utiles en cherchant à exposer, sous une forme attrayante et érudite, la théorie des séries et ses principales applications. Le but qu'il s'est proposé est d'ailleurs atteint d'une façon particulièrement heureuse.

La théorie des séries repose tout entière sur l'idée de limite. M. Godefroy, dans le Chapitre I de son Traité, s'attache avec raison à définir cette notion si souvent employée et peu comprise dont il développe avec soin les conséquences. A ce propos sont rappelées les premières propriétés des fonctions continues et des fonctions dérivables.

L'étude des séries à termes constants forme l'objet du deuxième Chapitre. Les règles de convergence de d'Alembert, de Cauchy, de Raabe et de Gauss sont successivement établies et discutées d'une manière précise, puis vient la théorie des séries de séries avec d'intéressants développements relatifs à la transformation des séries, aux séries de Lambert et de Clausen, à la multiplication des séries.

Le Chapitre III est consacré aux séries à termes variables. Il débute par des généralités sur la convergence uniforme et sur les séries entières. Le théorème d'Abel et les propositions importantes qui en dérivent sont démontrés avec netteté et rigueur. M. Godefroy applique ces principes fondamentaux à l'intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre, puis à la série binomiale, aux polynomes de Legendre et enfin à la série hypergéométrique. La question du développement en série des fonctions d'une variable est ensuite traitée avec détails; l'auteur insiste sur les différentes méthodes pratiques permettant de l'effectuer directement et s'arrête au cas où la fonction considérée est une fraction rationnelle, ce qui le conduit naturellement à dire quelques mots des séries récurrentes et, en particulier, des fonctions numériques de Lucas.

Le type par excellence des séries entières est la série exponentielle, qui joue un si grand rôle en Mathématiques.

M. Godefroy en fait une étude approfondie dans le Chapitre IV et aborde, en même temps, maints sujets instructifs ou curieux : polynomes de Hermite, fonctions de Bessel, nombres et polynomes de Bernoulli, formule sommatoire d'Euler. Nous signalerons aussi la démonstration, d'après Hermite, de l'irrationalité des puissances entières du nombre e et celle de transcendance de ce même nombre due à Hurwitz et à Gordan, toutes deux développées avec beaucoup d'ingéniosité. La fonction a^x est définie au moyen de e^x et sa relation caractéristique

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

est utilisée pour la démonstration, d'après Euler, de la formule du binome dans le cas le plus général. Le Chapitre se termine par l'exposé des propriétés des logarithmes et de la constante d'Euler.

La méthode la plus simple pour donner aux fonctions circulaires une existence purement analytique consiste, comme l'a indiqué M. J. Tannery, à prendre pour définition de $\cos x$ et de $\sin x$ leurs développements en séries entières. C'est la marche suivie par l'auteur, dans le Chapitre V, pour retrouver toute la Trigonométrie. A propos du nombre π est rapportée la belle démonstration de son irrationalité due à Hermite. Les développements en produits infinis, en séries entières, en séries de fractions simples des diverses fonctions circulaires sont ensuite obtenus d'une façon absolument élémentaire. La sommation de certains développements trigonométriques usuels, la fonction continue sans dérivée de Weierstrass, puis la théorie des fonctions circulaires inverses et des fonctions hyperboliques font l'objet de la dernière partie du Chapitre.

Le Chapitre VI renferme l'étude par les séries de la fonction gamma définie comme limite du produit

$$n^x \frac{1.2.3\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Ce mode d'exposition possède de multiples avantages, car il permet d'établir toutes les propriétés de la fonction gamma d'une manière à la fois uniforme, claire et rigoureuse. Les formules de Weierstrass, de Legendre, de Gauss, de Stirling, de Gudermann, ainsi que les développements en séries entières de $\log\Gamma(1+x)$ et de $\Gamma(1+x)$, se ramènent, en effet, à des transformations faciles de la définition primitive. C'est également par des transformations successives de séries que sont obtenues les séries de Binet et la célèbre série asymptotique de Stirling qui servent à exprimer la fonction de Binet $\varpi(x)$. Le Chapitre se termine par des développements fort intéressants sur les transcendantes de Prym définies par des relations fonctionnelles et sur les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, dérivées logarithmiques de $\Gamma(x)$, qui sont si utiles pour la sommation de séries importantes.

Nous ne voulons pas achever cette analyse sommaire sans insister sur les qualités qui caractérisent le Traité de M. Godefroy : une rédaction claire, le souci de la rigueur, la richesse des renseignements historiques et bibliographiques, le choix des nombreux exercices accompagnant chacun des Chapitres, et enfin le côté pratique de l'exposition. Ce sont là des raisons certaines de succès, et nous sommes persuadés que le présent Ouvrage rendra de grands services à tous ceux qui étudient l'Analyse par nécessité ou par goût. Les candidats aux grandes Écoles ou aux Certificats universitaires y trouveront traitées une foule de questions relevant des programmes de leurs examens; ils verront dans ce Livre un guide sérieux qui, tout en leur épargnant bien des recherches inutiles, leur donnera matière à penser.

E. Estanave,
Docteur ès Sciences.