Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 44-48
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__44_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1814.

(1899, p. 100.)

On considère trois coniques (S), (S_1), (S_2) *bitangentes entre elles aux deux points* A, B; *de deux points a, a_1 pris sur* (S), (S_1), *et tels que la droite aa_1 passe par le pôle commun à ces trois coniques, on mène des tangentes à* (S_2). *Les quatre sommets du quadrilatère ainsi formé décrivent deux coniques.* (G. Leinekugel.)

SOLUTION

Par M. J. Lez.

Il suffit de faire une transformation homographique de manière que les points A et B deviennent les points circulaires à l'infini et la proposition est immédiate.

1858.

(1900, p. 383.)

Prouver géométriquement que la caustique des rayons divergents du foyer (1) *et réfléchis à l'arc d'une cardioïde est la courbe*

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^{\frac{2}{3}},$$

où a est le rayon du cercle fixe de la cardioïde.

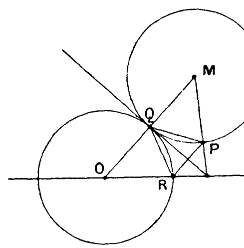
(Archibald.)

(1) L'énoncé doit être rectifié en substituant le *rebroussement* au *foyer* de la cardioïde.

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Soient O le centre du cercle base, R le point de rebrousse-



ment de la cardioïde, M le centre et Q le point de contact du cercle générateur, P le point correspondant de la cardioïde : évidemment | RP | est parallèle à | OM |, QR = PQ et l'angle QPR = MQP = MPQ; mais PQ est la normale à la cardioïde au point P, donc le rayon réfléchi du rayon issu de R est le diamètre du cercle générateur mené par P. Ce diamètre | MP | et la droite | OR | sont symétriques par rapport à la tangente en Q au cercle fixe, donc son enveloppe (1) est l'hypocycloïde bicuspidale (*néphroïde*) ayant en O son centre et en R l'un de ses deux rebroussements réels. Comme l'équation polaire de la néphroïde est (2), en posant OR = A,

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

le théorème est démontré.

---

(1) Voir *Nouvelles Annales de Math.*, 2e série, t. II, p. 279, question 667, et t. III, p. 261-264. *Voir* aussi *Periodico di Mat.*, t. XV, p. 164.

(2) *Voir*, par exemple, G.-J. CHILDE, *Related caustics* (*Quarterly Journal of pure and applied Math.*, Vol. VII, p. 142).

1860.

(1900, p. 383.)

$a_1 a_2 \ldots a_n$ étant les chiffres d'un nombre, soit

$$a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n})$$

un quelconque des nombres, que l'on peut obtenir du précédent en changeant l'ordre des chiffres par un nombre pair (impair) de transpositions. Montrer que l'on a

$$\Sigma a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} = \Sigma a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n} \qquad \text{pour} \qquad n \geqq 3.$$

(H. PICCIOLI.)

SOLUTION

Par Mlle AMELIE POLLAK.

$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ sont les chiffres d'un nombre; quand l'ordre de ces chiffres est changé, $(n-1)! = 1.2.3\ldots(n-1)$ nombres se forment avec a_1 à la première place, dont la moitié $\frac{(n-1)!}{2}$ est obtenue par un nombre pair de transpositions, et l'autre moitié $\frac{(n-1)!}{2}$ par un nombre impair de transpositions; car on change les chiffres autant de fois par un nombre pair que par un nombre impair de transpositions. Mais ce n'est possible que quand $(n-1)!$ est un nombre pair, c'est-à-dire quand $n > 2$.

Commençant de même par a_2, on a $(n-1)!$ nombres, dont la moitié $\frac{(n-1)!}{2}$ se forment par un nombre pair de transpositions et l'autre moitié $\frac{(n-1)!}{2}$ nombres par un nombre impair de transpositions, etc.

Chaque chiffre se trouve donc à chaque place $(n-1)!$ fois, savoir $\frac{(n-1)!}{2}$ fois dans des nombres résultant d'un nombre pair de transpositions, et $\frac{(n-1)!}{2}$ dans des nombres résultant d'un nombre impair de transpositions, c'est-à-dire autant de fois dans les premiers que dans les autres.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
&\Sigma\, a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} \\
&= \Sigma\, a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n} \\
&= \frac{(n-1)!}{2} g^{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\
&\quad + \frac{(n-1)!}{2} g^{n-2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \ldots \\
&\quad + \frac{(n-1)!}{2} g(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\
&\quad + \frac{(n-1)!}{2} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\
&= \frac{(n-1)!}{2} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1}) \\
&= \frac{(n-1)!}{2} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(g^{n-1} + g^{n-2} + \ldots + g + 1) \\
&= \frac{(n-1)!}{2} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\overbrace{11111\ldots1}^{n \text{ fois}}.
\end{aligned}
$$

1861.

(1900, p. 384.)

La tangente en un point M *d'une hypocycloïde triangulaire rencontre son cercle tritangent en deux points* P *et* Q.

Montrer que, si P *est le point plus rapproché de* M, *on a* PM = PQ. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Le théorème, énoncé aussi par Steiner au début de son Mémoire *Ueber eine besondere Curve dritter Klasse* (*Journal de Crelle,* t. 53, p. 232) a été démontré maintes fois. La démonstration suivante, très simple, basée sur la génération de la courbe comme hypocycloïde, est peut-être nouvelle. Soient A et P les points de contact du cercle générateur avec le cercle base et le cercle tritangent [1], M la position du point géné-

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

rateur : la normale à l'hypocycloïde au point M, d'après un théorème fondamental de Descartes-De la Hire, est |MA| et par suite la tangente |MP| à l'hypocycloïde en M coupe le cercle tritangent en P et au point Q symétrique de P par rapport à M.

Steiner appelle les points P et Q respectivement *centre* et *sommet* de la tangente |PQ| et donne le théorème précédent comme corollaire de l'autre : « chaque tangente est coupée par un *couple* (de tangentes orthogonales) en deux points équidistants de son centre ». On pourrait aussi démontrer aisément ce théorème et d'autres indiqués par Steiner en partant de la génération hypocycloïdique, ce que l'on n'a pas fait, je crois, jusqu'ici, et ne serait pas dépourvu d'intérêt au point de vue d'une théorie élémentaire de l'hypocycloïde à trois rebroussements.