Nouvelles annales de mathématiques

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 326-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__326_1>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

I. *Étant donnée l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} - qy = 0,$$

dont les coefficients p et q sont des fonctions elliptiques de x, aux mêmes périodes, et dont l'intégrale générale est supposée méromorphe, trouver dans tous les cas possibles la forme analytique des intégrales.

II. *Intégrer l'équation de Lamé*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (2px + a)y.$$

Epreuve pratique. — *Soit l'équation différentielle*

$$\frac{3\,dy}{dx} = -\frac{8y^3 - 3y - 1}{8xy^2 - x + 1};$$

la variable x partant de l'origine $x = 0$ et arrivant au *point $x = -1$ en suivant un certain chemin, l'intégrale y, qui avait la valeur initiale y_0, acquiert la valeur $-\frac{1}{2}$ par ce chemin. Trouver le développement en série qui, dans le domaine du point $x = -1$, représente les valeurs de l'intégrale considérée. On calculera les premiers coefficients de ce développement.* (Nancy, novembre 1901.)

I. *Donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* P *de deux variables x et y puisse être considérée comme la partie réelle d'une fonction analytique d'une variable imaginaire, $f(z)$, où $z = x - yi$, et démontrer cette condition.*

Démontrer que, si une fonction analytique $f(z)$ est finie, continue et uniforme dans une aire à un ou plusieurs contours, l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise dans le sens direct le long du contour de l'aire est nulle.

II. *Un cône de révolution est représenté par les équations*

$$x = u \cos\alpha \cos v, \qquad y = u \cos\alpha \sin v, \qquad z = u \sin\alpha,$$

où α est fixe et donné et où u et v sont deux paramètres variables.

Déterminer sur ce cône une courbe telle que la longueur comprise sur une tangente quelconque entre le point de contact et le point où cette tangente rencontre le plan des xy soit égale à une quantité donnée l.

Calculer la longueur d'un arc de la courbe et le rayon du cercle osculateur en un point de la courbe.

SOLUTION.

En posant $u = l \sin\varphi$, la courbe est représentée par l'équation

$$v \cos\alpha + \varphi + \cot\varphi = 0.$$

La projection sur le plan des xy se compose de deux branches qui ont l'origine pour point asymptotique et qui forment, en se réunissant, un rebroussement pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

L'arc de courbe est représenté par $l \log u$ et, R étant le rayon de courbure, on a

$$\frac{f^2}{R^2} = \frac{1 - 3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\alpha}.$$

Épreuve pratique. — *Calculer sous forme de fractions ordinaires simplifiées les coefficients de développement de* $\frac{z}{e^z - 1}$ *suivant les puissances croissantes de* z *jusqu'au coefficient de* z^8 *inclusivement.*

On posera

$$\frac{z}{e^z - 1} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots,$$

et l'on emploiera la méthode des coefficients indéterminés.

Solution.

On a

$$A_0 = 1, \qquad A_1 = -\frac{1}{2}, \qquad A_3 = A_5 = A_7 = 0, \qquad A_2 = \frac{1}{2^2.3},$$

$$A_4 = -\frac{1}{2^4.3^2.5}, \qquad A_6 = \frac{1}{2^5.3^3.5.7}, \qquad A_8 = -\frac{1}{2^6.3^3.5^2.7}.$$

(Besançon, juillet 1901.)

Étant donnés trois axes rectangulaires, trouver les surfaces S *telles que la somme algébrique des segments de la normale (en un point* M *de la surface) compris entre le pied* m *de cette normale et chacun des plans coordonnés soit égale à zéro.*

Vérifier que parmi les surfaces S *il se trouve des surfaces du deuxième degré* S', *rapportées à leurs plans principaux et passant par le point*

$$(x = 0, y = 0, z = a\sqrt{-1}).$$

Les intersections des surfaces S' *par le plan* $x\mathrm{O}y$ *forment un système de coniques dont on demande l'enveloppe et les trajectoires orthogonales.* (Poitiers, juillet 1901.)