NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 188-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__188_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1881.

(1900, p. 572.)

Les pieds des quatre perpendiculaires abaissées du centre d'un hyperboloïde équilatère sur les faces d'un tétraèdre conjugué sont situés dans un même plan.

(A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. G. FONTENE.

Si l'on prend comme tétraèdre de référence le tétraèdre conjugué, l'hyperboloïde a pour équation

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dT^2 = 0.$$

Les aires des faces du tétraèdre étant A, B, C, D, le plan de l'infini a pour équation

$$AX + BY + CZ + DT = 0,$$

et les coordonnées du centre M de l'hyperboloïde sont donnés par les relations

$$\frac{aX'}{A} = \frac{bY'}{B} = \frac{cZ'}{C} = \frac{dT'}{D}.$$

Si l'hyperbole est équilatère, on a

$$a + b + c + d = 0,$$

par suite

$$\frac{A}{X'} + \frac{B}{Y'} + \frac{C}{Z'} + \frac{D}{T'} = 0,$$

et cela exprime, comme on le voit, que les projections du point M sur les plans des faces du tétraèdre de référence sont dans un même plan (on s'appuie sur la proportionnalité des aires des faces d'un tétraèdre aux sinus des trièdres supplémentaires de ceux du tétraèdre).

Note. — *Voir*, à propos de ces propriétés, une Note de M. Duporcq : *Sur une extension à l'espace du théorème de Simson* (*S. M.*, t. XXIX, 1901, p. 29).

1887.

(1900, p. 273.)

Dans un tronc de cône de révolution, soient B *le rayon de la grande base,* b *celui de la petite, et soit* h *la hauteur du tronc. Un plan mené tangentiellement à la petite base, par le centre de la grande, détache du tronc de cône un onglet. Si l'on désire connaître le volume de cet onglet, c'est-à-dire la formule de ce volume en fonction de* B, b, h, *et qu'à cet effet on décompose l'onglet en éléments par des plans parallèles aux deux bases du tronc de cône, on se trouve en présence d'une opération longue et pénible.*

On propose de trouver une marche qui, par un très léger calcul, ramène tout à l'intégration d'une différentielle unique et de la forme $(a + bx - cx^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

(C. Richonnet.)

SOLUTION

PAR M. AUDIBERT.

L'onglet résulte de la section par un plan oblique à l'axe d'un demi-cône de révolution, et le volume du second fragment, complément de l'onglet, détaché par ce plan est mesuré par le produit de la surface de la section oblique multipliée par le tiers de la perpendiculaire abaissée sur son plan du sommet du cône.

La projection de cette section oblique sur le plan de la base a pour équation

$$(\alpha)\qquad B(2b-B)y^2+b^2x^2+2Bb(B-b)y-B^2b^2=0,$$

ellipse pour $2b>B$, parabole pour $2b=B$, hyperbole pour $2b<B$. Elle a un foyer à l'origine; nous supposerons $2b>B$.

L'équation polaire de (α) s'écrira

$$S=\frac{Bb}{b+(B-b)\sin\theta}.$$

La moitié de sa surface est donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\frac{B^2b^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{[b-(B-b)\sin\theta]^2}\\&=\frac{B^2b^2}{2}\left[\frac{2b}{B(2b-B)}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2b-B}{B}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{B-b}{Bb(2b-B)}\right].\end{aligned}$$

Soient S_1 la surface de la conique projetante et u l'angle du plan de la base et de la section; on aura

$$\frac{S_1}{2}=\frac{S}{2\cos u},$$

et le volume du complément de l'onglet sera

$$\frac{S}{2\cos u}\,\frac{l}{3}\cos u=\frac{S}{2}\,\frac{l}{3},\qquad l=\frac{Bh}{B-b}.$$

Alors, V désignant le volume de l'onglet, on aura

$$\begin{aligned}\frac{V}{2}&=\frac{l}{3}\,\frac{\pi B^2}{4}-\frac{S}{2}\,\frac{l}{3}\\&=\frac{B^3h}{6(B-b)}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{2b^3}{[B(2b-B)]^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2B-b}{B}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{b(B-b)}{B(2b-B)}\right\}.\end{aligned}$$

On voit que le problème se réduit au calcul de la surface de (α), qui peut d'ailleurs être obtenue sans recourir aux coordonnées polaires. On tire, en effet, de cette équation

$$\int y\,dx = \int (p + \sqrt{q - rx^2})\,dx,$$

p, q, r étant des constantes fonctions de B, b et h.

1896.

(1900, p. 272.)

Étant données deux tangentes rectangulaires à l'ellipse dont les points de contact sont A *et* B, *du centre* O *de l'ellipse on abaisse les perpendiculaires* OS *et* OS' *sur les tangentes en* A *et en* B, *et les perpendiculaires* OQ *et* OQ' *sur les normales en* A *et* B. *Quelle que soit la position des tangentes, on a*

$$OS \times OQ = OS' \times OQ'.$$

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Soit P le point commun aux tangentes rectangulaires [1] et M le milieu de la corde $\overline{AB}$: les trois points O, M, P sont en ligne droite et les normales aux points A et B vont se couper sur la droite OP au point symétrique de P par rapport à M. Les deux rectangles OSAQ, OS'BQ' sont donc équivalents (EUCL., I, 43).

Autre solution de M. VALDÈS.

1897.

(1900, p. 272.)

Si l'on considère toutes les hyperboles équilatères qui passent par deux points donnés et dont les asymptotes ont une direction fixe :

1° *Le lieu des centres de ces hyperboles est une droite;*

2° *Le lieu des sommets se compose d'une ellipse et d'une hyperbole;*

3° *Le lieu des foyers se compose aussi d'une ellipse et d'une hyperbole concentriques.* (E.-N. BARISIEN.)

---

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Prenons pour axes les parallèles menées par les points donnés $A(a, o)$, $B(o, b)$ et appelons C l'autre sommet du rectangle ayant les côtés OA, OB : l'équation du faisceau des hyperboles est

$$(1) \qquad xy + \lambda(bx + ay - ab) = o,$$

et la droite des centres est évidemment $ay = bx$.

Les équations des axes étant

$$(2) \qquad x + y + \lambda(a + b) = o,$$

$$(3) \qquad x - y + \lambda(a - b) = o,$$

en éliminant λ entre (1), (2) et (1), (3), nous aurons les équations du lieu des sommets : on trouve

$$(a + b)xy - (x + y)(bx + ay - ab) = o,$$
$$(a - b)xy - (x - y)(bx + ay - ab) = o,$$

deux coniques circonscrites au rectangle OACB et qui se coupent entre elles à angle droit.

Les coordonnées des foyers de (1) sont données par

$$x = -a\lambda \mp \sqrt{\mp 2ab\lambda(1 + \lambda)},$$
$$y = -b\lambda \mp \sqrt{\mp 2ab\lambda(1 + \lambda)}:$$

l'élimination de λ est immédiate, et l'on obtient

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & b(b + 2a)x^2 - 6abxy + a(a + 2b)y^2 \\ & \qquad + 2ab(a - b)(y - x) = o, \end{aligned} \right.$$

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & b(b - 2a)x^2 + 2abxy + a(a - 2b)y^2 \\ & \qquad - 2ab(a - b)(y - x) = o, \end{aligned} \right.$$

suivant que l'on prend les signes supérieurs ou les inférieurs : (4) représente une ellipse passant par les deux points O, C et ayant les points donnés A, B pour foyers ; (5) est une hyperbole concentrique passant par les points O, C.