NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI PICCIOLI

Sur les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 2 (1902), p. 177-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1902_4_2__177_1>

[O3k]

SUR LES HÉLICES CYLINDRIQUES DONT LES NORMALES PRINCIPALES RENCONTRENT UNE DROITE FIXE;

PAR M. HENRI PICCIOLI, à Pise.

La question que je me propose de résoudre dans cette Note est de chercher les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe. Cette question fut proposée et résolue par M. Pirondini dans un Travail paru dans le *Giornale di Matematiche* en 1885 : une autre résolution est due à M. Cesàro et on peut la trouver dans l'année 1886 du même journal. La solution que je vais donner est une application de certaines relations qui lient les moments des directions principales d'une courbe gauche par rapport à une droite fixe, formules que je ne crois pas remarquées jusqu'ici.

Soient p, q, r les cosinus des angles que la tangente, la normale principale, la binormale d'une courbe à double courbure L font respectivement avec une droite fixe l. On sait que, si ρ et τ désignent les rayons de courbure et de torsion

$$(1) \qquad \frac{dp}{ds} = \frac{q}{\rho}, \qquad \frac{dq}{ds} = -\frac{p}{\rho} - \frac{r}{\tau}, \qquad \frac{dr}{ds} = \frac{q}{\tau},$$

s désignant l'arc de L. On en déduit aisément que, si M_1, M_2, M_3 désignent les moments par rapport à l des directions principales de L, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dM_1}{ds} &= \frac{M_2}{\rho}, \\ \frac{dM_2}{ds} &= -\frac{M_1}{\rho} - \frac{M_3}{\tau} + r, \\ \frac{dM_3}{ds} &= \frac{M_2}{\tau} - q. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules auxquelles je faisais allusion plus haut.

Supposons maintenant que les normales principales de L rencontrent la droite l, c'est-à-dire que M_2 est nul. Les formules (2) deviennent

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} M_1 &= \text{const.}, \\ \frac{M_1}{\rho} + \frac{M_3}{\tau} &= r, \\ \frac{dM_3}{ds} &= -q. \end{aligned}\right.$$

La première de ces relations nous montre que : *Toute courbe dont les normales principales rencontrent une droite fixe jouit de la propriété que le moment de ses tangentes par rapport à cette droite est constant.*

Soit h le segment compris sur une normale principale entre L et l; désignons respectivement par (a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c'') les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, par (x, y, z) les coordonnées d'un point de L, et par (x', y', z') celles du point correspondant sur l. On a

$$x' = x + bh, \qquad y' = y + b'h, \qquad z' = z + b''h.$$

En dérivant par rapport à s, et en tenant compte des formules de Serret, analogues aux formules (1), on en déduit

$$\frac{dx'}{dz} = a + b\frac{dh}{ds} - \frac{ch}{\tau} - \frac{ah}{\rho},$$

$$\frac{dy'}{dz} = a' + b'\frac{dh}{ds} - \frac{c'h}{\tau} - \frac{a'h}{\rho},$$

$$\frac{dz'}{dz} = a'' + b''\frac{dh}{ds} - \frac{c''h}{\tau} - \frac{a''h}{\rho}.$$

En posant

$$(4) \qquad A^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{ds^2} = \frac{ds'^2}{ds^2},$$

et en remarquant que

$$\alpha = \frac{dx'}{A\,ds}, \qquad \alpha' = \frac{dy'}{A\,ds}, \qquad \alpha'' = \frac{dz'}{A\,ds}$$

sont les cosinus directeurs de la droite l, on en tire

$$(5) \qquad \begin{cases} p = a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' = \dfrac{1 - \dfrac{h}{\rho}}{A}, \\ q = b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' = \dfrac{1}{A}\dfrac{dh}{ds}, \\ r = c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' = -\dfrac{1}{A}\dfrac{h}{\tau}. \end{cases}$$

Supposons maintenant que la courbe L soit une hélice cylindrique, ce qui conduit à la relation

$$(6) \qquad \frac{\tau}{\rho} = \operatorname{tang}\varphi \qquad (\varphi \text{ const.}).$$

En multipliant par τ la seconde des équations (2), dérivant par rapport à s, et tenant compte des systèmes (1) et (2), on obtient

$$2q + r\frac{d\tau}{ds} = 0,$$

et, en y remplaçant q et r par les valeurs (5),

$$\frac{2}{h}\frac{dh}{ds} - \frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{ds} = 0.$$

Il s'ensuit que

$$(7) \qquad h = \sqrt{a\tau} = \sqrt{a\rho\,\operatorname{tang}\varphi} \qquad (a \text{ const.}).$$

Or, les cosinus directeurs des génératrices du cylindre dont L est une hélice sont

$$a\cos\varphi - c\sin\varphi \qquad a'\cos\varphi - c'\sin\varphi, \qquad a''\cos\varphi - c''\sin\varphi$$

et le cosinus de l'angle ω de ces génératrices avec la droite l sera donné par la formule

$$\cos\omega = p\cos\varphi - r\sin\varphi,$$

ou, en tenant compte de (5),

$$(8) \qquad A\cos\omega = \cos\varphi.$$

Comme l'angle ω est fixe, A est constant. La valeur (4) de A montre que : *Les normales principales interceptent sur* L *et l des arcs proportionnels*. D'ailleurs, on a

$$A^2 = \left(1 - \frac{h}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{dh}{ds}\right)^2 - \frac{h^2}{\tau^2},$$

d'où, par suite des formules (7), qui permettent d'exprimer ρ et τ en fonction de h,

$$(9) \quad s = \cos\omega\cos\varphi \int \frac{h\,dh}{\sqrt{(\cos^2\varphi - \cos^2\omega)h^2\cos^2\varphi + ah\cos^2\omega\sin 2\varphi - a^2\cos^2\omega}}.$$

En changeant s et h respectivement en $\frac{\sigma}{\sin\varphi}$ et $\sqrt{\frac{2aR}{\sin 2\varphi}}$ nous obtenons l'équation intrinsèque de la section droite du cylindre sous la forme

$$(10) \quad \sigma = \frac{\sqrt{a}\cos\omega}{2} \int \frac{dR}{\sqrt{(\cos^2\varphi - \cos^2\omega)R\cot\varphi + \cos^2\omega\sqrt{2aR\sin 2\varphi} - a\cos^2\omega}}.$$

On peut remarquer que les normales principales des courbes cherchées, sauf le cas où elles sont perpendiculaires à la direction l, ne peuvent *jamais* la couper sous un angle constant différent de $\frac{\pi}{2}$.

Supposons que l'on ait

$$q = \text{const. différente de zéro};$$

la seconde des équations (1) nous donne

$$\frac{p}{\rho} + \frac{r}{\tau} = 0,$$

ou, à cause de (5),

$$\tau\left(1 - \frac{h}{\rho}\right) - \frac{h}{\tau}\rho = 0.$$

d'où

$$\tau = h(\cot\varphi + \operatorname{tang}\varphi).$$

La troisième des formules (5) nous donnant alors r constant, de la correspondance (1), il s'ensuivrait

$$q = 0,$$

contrairement à notre hypothèse.

Les cas exceptés, c'est-à-dire ceux où les normales sont perpendiculaires à l, mènent à l'hélice circulaire : h, on le voit facilement, est constant; la direction de l, qui, en général, diffère de celles des génératrices du cylindre, coïncide alors avec elle.