

## **Deuxième concours des « Nouvelles annales » pour 1900**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 1 (1901), p. 97-106

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1901\\_4\\_1\\_\\_97\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__97_1)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

---

---

[M<sup>2</sup>3h]

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES »  
POUR 1900;

PAR UN ANONYME.

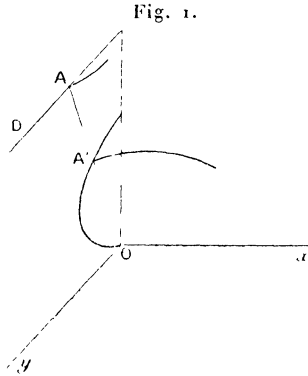
— — —  
**Sujet.**

*Les axes Ox, Oy, Oz étant supposés rectangulaires, on donne dans le plan yOz le cercle (C) et la droite (D) définis par les équations*

(C)  $y^2 + z^2 - c'z = 0,$

(D)  $z - c = 0,$

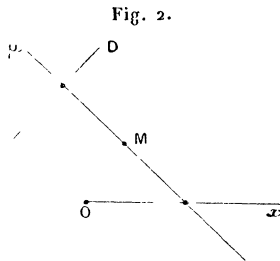
puis on considère une hyperbole équilatère (H) située dans un plan (Π) (fig. 1) passant par Ox et dont les



sommets réels A et A' sont situés, le premier sur la droite (D), le second sur le cercle (C) (le point A' étant distinct du point O).

1° Lorsque le plan Π tourne autour de Ox, l'hyperbole (H) engendre une surface du troisième ordre (S) tangente au plan des xy tout le long de l'axe Ox.

2° On considère une droite variable (Δ) assujettie à s'appuyer sur Ox et sur la droite (D), et le point M (fig. 2), non situé sur Ox ou sur (D), intersection de



la droite Δ et de la surface cubique (S).

Montrer que les coordonnées du point M s'ex-

priment rationnellement en fonction des deux coordonnées variables du point  $\mu$ , trace de la droite  $\Delta$  sur le plan  $z = 2c$ .

3° Quand le point  $M$  décrit la section de la surface  $(S)$  par un plan  $(P)$ , le point  $\mu$  décrit une cubique  $(\Gamma)$ , et quand le plan  $(P)$  varie, la cubique  $(\Gamma)$  passe par six points fixes qui sont les sommets d'un quadrilatère complet.

4° Trouver toutes les droites tracées sur la surface.

5° Quand le point  $M$  se déplace sur la surface  $(S)$  de façon que le plan tangent en  $M$  passe par un point fixe de l'espace,  $Q$ , le point  $\mu$  décrit une conique.

Où doit se trouver le point fixe pour que cette conique se décompose en deux droites ou se réduise à une droite double?

Que peut-on conclure de là pour le cône circonscrit à la surface  $(S)$  et dont le sommet est le point  $Q$ ?

6° Étudier le lieu du point  $M$  quand le point  $\mu$  décrit une droite située dans le plan  $z = 2c$ .

La surface dont l'étude constitue l'objet du problème proposé est, comme nous le verrons plus loin, une surface du troisième ordre à quatre points doubles. Nous allons donc étudier d'abord les propriétés d'une telle surface : la solution de la question en sera une conséquence. Nous aurons, pour cela, recours à une transformation qui peut être considérée comme une généralisation de la transformation plane du second ordre.

1. *Les transformations*  $(T)$ . — Nous désignerons par *transformations*  $(T)$  les transformations ponctuelles involutives qui associent entre eux deux points  $m$  et  $m'$ , dont les coordonnées homogènes

$$(x, y, z, t) \quad \text{et} \quad (x', y', z', t')$$

relatives à un même tétraèdre de référence sont unies par les relations

$$xx' = A, \quad yy' = B, \quad zz' = C, \quad tt' = D.$$

On voit immédiatement qu'à un sommet du tétraèdre de référence correspondent tous les points de la face opposée; de même, à tout point d'une arête de ce tétraèdre correspondent tous ceux de l'arête opposée.

Il est facile de voir qu'une droite quelconque se transforme en une cubique gauche circonscrite au tétraèdre de référence. On en déduit qu'une surface d'ordre  $n$  se transforme généralement en une surface d'ordre  $3n$ : cette dernière admet les sommets du tétraèdre pour points multiples d'ordre  $2n$ , et ses arêtes pour génératrices d'ordre  $n$ .

Remarquons encore qu'à un plan issu d'une arête correspond un plan issu de la même arête. Ces plans, étant réciproques, se correspondent involutivement; par suite, par chaque arête il passe deux plans coïncidant avec leurs homologues. A une droite s'appuyant sur deux arêtes opposées, c'est-à-dire commune à deux plans issus de ces arêtes, correspondra donc une droite analogue.

Si les deux plans considérés sont doubles, il en sera de même de leur intersection; il y a donc quatre droites doubles s'appuyant sur chaque couple d'arêtes opposées du tétraèdre fondamental.

2. Soit  $\Delta$  l'une de ces droites doubles, s'appuyant sur les arêtes opposées  $A$  et  $A'$  du tétraèdre fondamental, et soient  $M$  et  $M'$  deux droites homologues s'appuyant sur ces mêmes arêtes: nous aurons à envisager la transformation ponctuelle  $(m, m')$  qui associe les traces de ces droites  $M$  et  $M'$  sur un plan  $P$  issu de  $\Delta$ . Nous allons

montrer que cette transformation est une homologie involutive.

Soient, en effet,  $\alpha$  et  $\alpha'$  les points où  $\Delta$  coupe  $A$  et  $A'$ ; puisque les plans  $AM$  et  $AM'$  se correspondent involutivement, il en est de même de leurs traces  $\alpha m$  et  $\alpha m'$ ; les droites  $\alpha' m$  et  $\alpha' m'$  décrivent également des faisceaux involutifs; d'ailleurs, dans ces deux involutions la droite  $\alpha\alpha'$  se correspond à elle-même. Soient  $\alpha\omega$  et  $\alpha'\omega$  les deux autres rayons doubles de ces involutions, c'est-à-dire les conjuguées harmoniques de la droite  $\alpha\alpha'$  par rapport aux angles  $m\alpha m'$  et  $m\alpha' m'$ : il est bien évident que la droite  $mm'$  passe par  $\omega$ , et que le segment  $mm'$  est divisé harmoniquement par le point  $\omega$  et la droite  $\alpha\alpha'$ ; l'homologie annoncée en résulte.

Si  $m$  coïncide avec la trace  $\beta$  ou  $\gamma$  d'une arête du tétraèdre, il est d'ailleurs évident que  $m'$  coïncidera avec la trace  $\beta'$  ou  $\gamma'$  de l'arête opposée. Le centre d'homologie,  $\omega$ , est donc le point de concours des diagonales  $\beta\beta'$  et  $\gamma\gamma'$  du quadrilatère complet  $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$  déterminé sur le plan  $P$  par les traces des arêtes du tétraèdre fondamental.

3. *Les surfaces du troisième ordre à quatre points doubles.* — D'après les remarques faites plus haut (n° I), une transformation (T) associée à un plan une surface du troisième ordre passant par les arêtes du tétraèdre fondamental et admettant ses sommets pour points doubles. La réciproque est immédiate, car une telle surface,  $S$ , a nécessairement une équation de la forme

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{t} = 0.$$

On vérifiera sans peine que le plan

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0,$$

touche  $S$  en tous les points d'une arête, et la coupe, par suite, suivant une autre génératrice,  $\Delta$ , qui est aussi dans le plan

$$\frac{x}{\gamma} + \frac{\delta}{t} = 0.$$

Ainsi,  $S$  contient trois génératrices  $\Delta$ , s'appuyant respectivement sur deux arêtes opposées du tétraèdre, et contenues toutes trois dans le plan

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{t}{\delta} = 0.$$

Nous allons voir que ces droites et les arêtes du tétraèdre des points doubles sont les seules génératrices de la surface  $S$ .

4. *Sections planes.* — Par une transformation  $(T)$ , à tout point  $m$  de  $S$  correspond un point  $m'$  d'un plan  $P$ . Considérons de même un plan  $Q$ ; la même transformation lui associe une surface  $\Sigma$  analogue à  $S$ , et à la courbe  $(Q, S)$  correspond la courbe  $(\Sigma, P)$ , c'est-à-dire une cubique,  $\Gamma$ , qui passe par les traces sur le plan  $P$  des arêtes du tétraèdre fondamental; désignons par  $K$  le quadrilatère complet dont ces traces sont les sommets; nous voyons que :

*Par une transformation  $(T)$ , aux sections planes de  $S$  correspondent dans un plan  $P$  des cubiques  $\Gamma$  circonscrites au quadrilatère complet  $K$  formé par la section du tétraèdre des points doubles.*

Si le plan  $Q$  passe par un des points doubles,  $a$ , la cubique  $\Gamma$  se décompose en la trace du plan des autres points doubles et en une conique qui passe par les traces des trois arêtes issues de  $a$ . Si le plan  $Q$  passait par une arête du tétraèdre,  $\Gamma$  se décomposerait en deux côtés du

quadrilatère  $K$  et en une droite issue du point de concours des trois autres.

5. Il reste encore pour  $\Gamma$  un autre mode de décomposition : elle peut être formée par une diagonale,  $\alpha\alpha'$ , du quadrilatère  $K$ , et par une conique passant par les quatre sommets  $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ . Or, ainsi que nous l'avons remarqué (n° 4), à la droite  $\alpha\alpha'$  correspond une droite s'appuyant sur  $A$  et  $A'$  : c'est une des trois génératrices  $\Delta$  signalées tout à l'heure (n° 3); les deux autres correspondraient aux diagonales  $\beta\beta'$  et  $\gamma\gamma'$ .

Nous avons d'ailleurs obtenu toutes les génératrices de la surface, car nous avons examiné tous les modes de décomposition de  $\Gamma$ .

6. *Lignes asymptotiques.* — En dehors de ces cas de décomposition, la cubique  $\Gamma$  peut présenter un point double, lorsque le plan  $Q$  est tangent à  $S$ . Or, on sait que, si une cubique circonscrite à un quadrilatère complet présente un point double, les tangentes en ce point sont les rayons doubles de l'involution définie par les droites qui joignent le point double aux sommets du quadrilatère : par suite, ces tangentes touchent chacune une des coniques inscrites au quadrilatère et qui passent par le point double. De là résulte immédiatement que :

*Par la transformation (T), aux lignes asymptotiques de S correspondent dans le plan P les coniques inscrites au quadrilatère K.*

7. *Courbes de contact des cônes circonscrits.* — Cherchons maintenant la transformée de la courbe de contact du cône de sommet  $\sigma$  circonscrit à la surface  $S$ . Puisque aux droites issues de  $\sigma$  correspondent les cu-



biques gauches circonscrites au tétraèdre fondamental et passant par  $\sigma'$ , la transformée en question est le lieu des points de contact de celles de ces cubiques qui touchent le plan P.

Or, on sait <sup>(1)</sup> que les cubiques gauches qui passent par cinq points fixes ont pour traces sur un plan fixe P les sommets d'un triangle conjugué à une conique fixe : si deux de ces sommets sont confondus, ils sont donc sur cette conique, qui constitue le lieu cherché. Elle est d'ailleurs, comme on sait, conjuguée aux traces de deux droites joignant deux couples de points arbitrairement choisis parmi les cinq points fixes. Toutes les coniques qu'on obtiendra diviseront donc harmoniquement les segments  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$  et  $\gamma\gamma'$ . Ainsi :

*Par la transformation (T), à la courbe de contact d'un cône circonscrit à S correspond dans le plan P une conique qui divise harmoniquement les diagonales du quadrilatère K.*

On voit aisément que, si l'on considère trois de ces coniques, leur hessienne est la cubique  $\Gamma$  qui représente la section de S par le plan des sommets des trois cônes considérés.

8. Les coniques que nous venons d'obtenir, n'étant assujetties qu'à deux conditions linéaires, peuvent se décomposer en deux droites, dont l'une arbitraire. Mais, dans ce cas, la courbe de contact présente un point double, et, par suite,  $\sigma$  est sur S. D'ailleurs, nous avons indiqué (n° 4) qu'à toute droite la transformation (T)

---

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple, E. DUPORCQ, *Premiers Principes de Géométrie moderne*, p. 109.

associe une cubique gauche circonscrite au tétraèdre des points doubles. Par suite :

*Le cône circonscrit à S, issu d'un point de cette surface, se décompose en deux cônes du troisième ordre qui touchent S en tous les points de deux cubiques gauches, passant par les quatre points doubles.*

9. *Autre représentation plane de S.* — Soit P un plan issu de celle des trois génératrices  $\Delta$  qui s'appuie sur les arêtes A et A'. Toute droite M s'appuyant sur ces arêtes coupe S et P en deux points  $\mu$  et  $m$ , et il est facile de voir que les coordonnées de  $\mu$  s'expriment rationnellement en fonction de celles de  $m$ . On peut donc envisager ce nouveau mode de représentation plane.

Or, il existe une transformation (T) qui associe entre eux le plan P et la surface S; car, si leurs équations sont

$$ax + by + cz + dt = 0, \quad \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{t} = 0,$$

il suffit de prendre

$$A = \frac{\alpha}{a}, \quad B = \frac{\beta}{b}, \quad C = \frac{\gamma}{c}, \quad D = \frac{\delta}{d}.$$

La génératrice  $\Delta$  se correspondra d'ailleurs évidemment à elle-même. Soit M' la droite que cette transformation associe à M, et  $\mu'$ ,  $m'$  les points où elle coupe S et P. Nous avons vu précédemment (n° 2) que la transformation  $(m, m')$  est une homologie. La transformation  $(\mu, m)$ , égale au produit des transformations  $(\mu, m')$  et  $(m', m)$ , c'est-à-dire de la transformation (T) et d'une homologie, jouit donc des propriétés projectives énoncées pour la transformation (T) : il suffit de se rappeler que (n° 2) le quadrilatère complet (K) se transforme en lui-même par l'homologie  $(m, m')$ .

10. *Application au cas particulier de l'énoncé.*  
 — On trouve sans difficulté que la surface envisagée dans l'énoncé a pour équation

$$x^2z = (z - c)(y^2 + z^2 - c'z).$$

Remarquons que si le plan  $\Pi$  passe par l'un ou l'autre des points communs à la droite (D) et au cercle (C), l'hyperbole (H) se réduit à deux droites, et il est bien évident que les deux couples de droites ainsi obtenus coupent  $Ox$  aux mêmes points. Ces quatre droites forment donc avec  $Ox$  et (D) six arêtes d'un tétraèdre, contenues sur la surface.

Observons enfin que la surface passe par la droite à l'infini du plan  $z = 2c$ ; cette droite joue donc le rôle de la droite  $\Delta$  envisagée dans le numéro précédent, et tous les résultats énoncés deviennent ainsi une conséquence immédiate de ceux que nous venons d'exposer.