NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1900. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 86-93

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__86_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1900. — COMPOSITIONS.

Besançon.

ANALYSE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer une courbe plane* C *telle que,* Ox *étant une droite donnée,* A *un point fixe pris sur la courbe* C, M *un point variable pris sur cette courbe,* T *le point où la tangente en* M *rencontre l'axe* Ox, *l'arc* AM *soit constamment égal au double de la tangente* MT.

L'équation du problème est

$$s = \frac{2y\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

en désignant l'arc AM par s. En différentiant cette équation, puis en remplaçant ds par $\sqrt{1+y'^2}\,dx$, on obtient par rapport à y une équation différentielle du second ordre. La courbe cherchée est une cycloïde.

Épreuve pratique. — 1° *Étant donnés les deux polynomes*

$$X = x^4 + 3x^2 + 2, \qquad Y = x^3 - 1,$$

déterminer deux polynomes A *et* B, *l'un du troisième degré, l'autre du second degré, tels que l'on ait identiquement*

$$AY + BX = 1.$$

2° *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

On obtient par la méthode des coefficients indéterminés

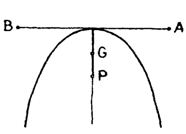
$$A = \frac{5x^3 - 7x^2 + 14x - 16}{18}, \qquad B = \frac{-5x^2 + 7x + 1}{18};$$

l'intégrale demandée peut s'obtenir soit directement, soit par la méthode de Cauchy, et sa valeur est $\frac{\pi}{2}$.

Mécanique.

Épreuve écrite. — I. *Exposer la transformation de l'équation de d'Alembert qui donne l'équation de Clairaut.*

II. *Une barre pesante homogène est reliée à un poids* P *sur la perpendiculaire en son milieu de sorte que le centre de gravité du système est en* G.



La barre repose en son milieu sur le sommet d'une chaînette renversée dont l'axe est vertical.

On écarte la barre de sa position d'équilibre, trouver le mouvement de la barre roulant sur la chaînette.

Désignons par m la masse totale du système constitué par la barre homogène et le poids P, par mk^2 le moment d'inertie de ce système par rapport au point G, par a le paramètre de la chaînette, par h la distance du point G à la barre. Prenons pour axes de coordonnées la base et l'axe de la chaînette, et soit y l'ordonnée du point où la barre touche la chaînette. Comme la barre roule sans glisser sur la chaînette, l'équation des forces vives suffit à déterminer le mouvement. On a

$$\frac{m(y^2+h^2+k^2-a^2)}{y^2(y^2-a^2)}\frac{dy^2}{dt^2}=\mathrm{C}+2mga\frac{y}{a+h},$$

C désignant une constante.

Épreuve pratique. — *Dessiner l'engrenage d'un pignon et d'une crémaillère, le pignon étant muni de six ailes. On prendra* 12^{cm} *pour le diamètre de la circonférence primitive du pignon.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Établir la fonction* S *introduite par Tisserand dans la théorie de la capture des comètes.*

Application aux groupes de comètes périodiques liées à Jupiter.

Épreuve pratique. — *On donne les longueurs de deux rayons vecteurs r et r' d'une comète parabolique et leur angle 2α. Calculer le temps mis par la comète pour décrire l'arc de parabole que sous-tend cet angle.*

Dijon.

Analyse.

Épreuve écrite. — I. *Exposer les points fondamentaux de la théorie du logarithme népérien.*

Démontrer la formule

$$\int_c f(x)\,dx = 2\pi i \mathcal{E}_s f(x),$$

où la fonction $f(x)$ est méromorphe à l'intérieur de l'aire limitée et imperforée s, olotrope sur son contour (c), où l'intégrale est prise sur le contour parcouru une fois dans le sens direct.

II. *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.*

Épreuve pratique. — *Calculer avec quatre chiffres décimaux exacts la racine quatrième du nombre e, base du système des logarithmes népériens.*

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Attraction d'un ellipsoïde homogène à trois axes inégaux sur un point intérieur ou extérieur.*

Épreuve pratique. — *Trouver les axes principaux d'inertie d'un rectangle homogène et d'épaisseur constante par rapport à un de ses sommets.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Théorie de la lunette méridienne.*

Épreuve pratique. — *Détermination du méridien d'un lieu par une mesure d'azimut de l'étoile polaire.*

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

Question de Cours. — *On considère l'intégrale indéfinie*

$$\int f(x, y)\, dx,$$

$f(x, y)$ étant une fonction rationnelle de x et de y; on suppose, de plus, que y est la racine carrée d'un polynome du quatrième degré en x.

1° *Montrer comment cette intégrale peut être exprimée à l'aide des fonctions qui figurent dans l'intégration des fractions rationnelles, et, en outre, à l'aide de symboles nouveaux qui sont les intégrales elliptiques de première, de deuxième et de troisième espèce.*

2° *Les intégrales elliptiques étant ainsi définies, faire voir comment on peut, par une transformation rationnelle, les ramener à la forme normale.*

Problème. — *Soient $f(z)$ une fonction holomorphe dans une aire (S), limitée par un contour simple (s); a, b, x les affixes de points distincts intérieurs à (S); α et β des entiers positifs, $\alpha + \beta = n$.*

Démontrer que le résidu de la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)(x-a)^\alpha (x-b)^\beta}{(x-z)(z-a)^\alpha (z-b)^\beta},$$

au point $z = a$, est un polynome entier en x de degré $n - 1$.

En conclure la formule

$$f(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_{(s)} \varphi(z)\, dz = \mathrm{F}(x),$$

l'intégrale étant prise dans le sens positif, le long du contour (s), *et* $F(x)$ *désignant un polynome de degré* $n-1$.

Montrer que ce polynome $F(x)$ *satisfait aux n conditions.*

$$F(a) = f(a), \quad F'(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad F^{(\alpha-1)}(a) = f^{(\alpha-1)}(a),$$
$$F(b) = f(b), \quad F'(b) = f'(b), \quad \ldots, \quad F^{(\beta-1)}(b) = f^{(\beta-1)}(b).$$

Mécanique rationnelle.

I. Question de Cours. — 1° *Établir les équations de Resal par lesquelles on peut remplacer celles d'Euler, dans l'étude du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, lorsque deux des moments principaux d'inertie* A *et* B *sont égaux.*

2° *Trouver, dans ce même cas, les conditions que doit vérifier le couple résultant* (L, M, N) *pour que le mouvement se réduise à une précession uniforme, sans nutation.*

II. Problème. — *Étudier les mouvements de deux points matériels* M *et* M_1, *des masses* m *et* m_1, *non pesants, s'attirant proportionnellement à leur distance, et assujettis à se mouvoir sans frottement sur deux cercles fixes égaux* C *et* C_1, *placés de manière que leurs plans soient tous deux perpendiculaires à la ligne des centres* CC_1.

On supposera qu'à l'instant initial la droite MM_1 *est parallèle à* CC_1.

Astronomie.

Épreuve théorique. — *Intégrer, à l'aide de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi, les équations du mouvement d'une planète par rapport au Soleil. Inter-*

prêter les constantes introduites en fonction des éléments de l'orbite de la planète.

Quand la planète est soumise à une force perturbatrice, dire ce qu'on appelle VARIABLES KÉPLÉRIENNES ; *établir les équations qui donnent les dérivées de ces variables.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résoudre, par l'emploi de la méthode des moindres carrés, les équations suivantes, fournies par des observations d'égale précision*

$$\begin{aligned} 72x + 85y - 29 &= 0, \\ 78x + 3y + 2 &= 0, \\ 15x - 94y + 39 &= 0, \\ 103x + 8y + 3 &= 0. \end{aligned}$$

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Rôle utile du frottement dans la traction mécanique. Théorie de l'adhérence. Calcul de l'effort maximum utilisable à la jante d'une roue motrice. Calcul du couple résistant maximum utilisable dans le cas du freinage par le moteur.*

II. *Voiture automobile dont toutes les roues sont motrices. Calcul de l'effort maximum de traction disponible à la barre d'attelage. Traction au démarrage et sur une rampe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Épure du diagramme corrigé de l'inertie du piston et de l'inertie de la bielle dans le cas d'une machine à vapeur fixe à grande vitesse.*

On suppose que l'on ait obtenu à l'aide d'un diagramme d'indicateur le graphique des efforts moteurs évalués au bouton de la manivelle.

On demande d'établir les deux graphiques qui donnent les corrections à apporter au graphique précédent lorsqu'on tient compte séparément : 1° de l'inertie du piston ; 2° de l'inertie de la bielle.

Vitesse : 240 tours à la minute.

Longueur de la bielle : cinq fois celle de la manivelle.

On choisira arbitrairement les autres éléments.

N. B. — En admettant tous les résultats relatifs aux mouvements plans, on retrouvera très brièvement les formules à employer et l'on indiquera en quelques mots la marche suivie.