NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ISSALY

Étude sur les pseudo-surfaces, en général, et sur un exemple particulier de pseudo-surfaces minima

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 53-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__53_1>

[O6]

ÉTUDE SUR LES PSEUDO-SURFACES, EN GÉNÉRAL, ET SUR UN EXEMPLE PARTICULIER DE PSEUDO-SURFACES MINIMA;

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

L'exemple auquel l'étude générale que nous avons en vue doit, en quelque sorte, servir de cadre est celui d'un *pseudo-hélicoïde* gauche, très voisin de l'hélicoïde à plan directeur ordinaire.

Bien qu'un pareil lieu ne puisse pas être représenté, à la manière des surfaces, par une équation en *termes finis*, il peut l'être toutefois, analytiquement, par trois équations différentielles simultanées, et géométriquement, par les réseaux, tous réels et intégrables, de ses lignes de courbure, de ses lignes asymptotiques, géodésiques, etc.

Comme il sera prouvé, notamment, que les premières de ces lignes sont obliques entre elles, tandis que les secondes sont rectangulaires, nous pouvons en conclure (eu égard à nos recherches antérieures) que le nouveau lieu est une *pseudo-surface*, d'abord, et, plus strictement, une pseudo-surface *minima*.

Allant plus loin, nous ferons voir que, dans le sens habituel du mot, notre pseudo-hélicoïde est rigoureusement *applicable* sur une alysséide qu'on aurait déformée en altérant (comme pour lui, du reste) la loi de variation infinitésimale de ses rayons vecteurs, sans cependant nuire en rien, chose possible, à l'orthogonalité initiale de ses lignes de courbure.

Mais, pour traiter avec plein succès un sujet si inusité, il nous paraît opportun d'en faire comme le centre de tout un ensemble de formules exclusivement empruntées à ce que, par extension, on peut nommer la *théorie des pseudo-surfaces* (1).

I.

DÉFINITIONS ET FORMULES RELATIVES A LA THÉORIE DES PSEUDO-SURFACES.

Coordonnées rectangulaires.

1. Étant données deux séries de courbes (s), (s'), variables de forme et de position, mais assujetties à se rencontrer, aux infiniment petits du deuxième ordre près, nous avons, dès 1888, démontré, dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France*, qu'un tel lieu, dit *pseudo-surface*, non seulement possède les propriétés fondamentales des surfaces, mais encore les généralise notablement. Ainsi en est-il, par exemple, pour tout ce qui a trait à la normale, aux plans soit tangent, soit osculateur, à l'indicatrice, aux lignes remarquables de toute espèce, etc.

(1) Une analyse très succincte de ce travail a été présentée par l'auteur, dans la séance du 9 août 1900, au Congrès des Mathématiciens, réunis en Sorbonne (Section de Géométrie).

Ceci rappelé, soient, d'une part, T_0 le trièdre trirectangle fixe de référence et, d'autre part, MXYZ ou T, le trièdre mobile, supposé, lui aussi, jusqu'à avis contraire, trirectangle. Soient en outre a, b, c, a', ..., les cosinus directeurs des arêtes de ce second trièdre. Nous admettrons comme établi *géométriquement* le système de relations différentielles (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 50; 1900) :

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= a' r - a'' q, \\ \frac{\partial a'}{\partial s} &= a'' p - a r, \\ \frac{\partial a''}{\partial s} &= a q - a' p. \end{aligned} \right.$$

ainsi que son analogue, relatif à la variable s'. Des deux réunis on déduit aussitôt

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} p &= \Sigma a'' \frac{\partial a'}{\partial s} = -\Sigma a' \frac{\partial a''}{\partial s}, \\ q &= \Sigma a \frac{\partial a''}{\partial s} = -\Sigma a'' \frac{\partial a}{\partial s}, \\ r &= \Sigma a' \frac{\partial a}{\partial s} = -\Sigma a \frac{\partial a'}{\partial s}, \\ p' &= \Sigma a'' \frac{\partial a'}{\partial s'} = -\Sigma a' \frac{\partial a''}{\partial s'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Au moyen de ces valeurs, il devient facile de former, en coordonnées rectangulaires, du moins, les équations des diverses lignes remarquables d'une pseudo-surface $\mathfrak{F}''$, tangente à l'origine M, au plan mobile des XY, à savoir

$$(3)\qquad p\, ds^2 + (q + p')\, ds\, ds' + q'\, ds'^2 = 0 \qquad \text{(lignes de courbure)},$$

$$(4)\qquad -q\, ds^2 + (p - q')\, ds\, ds' + p'\, ds'^2 = 0 \qquad \text{(lignes asymptotiques)},$$

$$(5)\qquad d\varphi + r\, ds + r'\, ds' = 0 \qquad \text{(lignes géodésiques)}.$$

On passera d'ailleurs au cas des surfaces en introduisant, dans les deux premières, la condition connue $p + q' = 0$.

Mais ici une question se présente : Est-il possible de distinguer les pseudo-surfaces entre elles, comme on distingue les surfaces, et, conséquemment, de déterminer avec netteté les lignes, ou asymptotiques, ou géodésiques, etc., propres à chacune? Oui, on le peut. Il suffit pour cela de mettre à profit l'indépendance originelle (¹) des arcs ds, ds', et de poser, à l'exemple de Gauss,

$$(6) \qquad ds = \mathrm{A}\, du, \qquad ds' = \mathrm{A}'du',$$

formules dans lesquelles A et A' désignent des fonctions *données* de u et u', mais dont il y aura lieu pourtant de fixer tout à l'heure le mode de composition. Quoi qu'il en soit, si pour le moment nous portons ces valeurs

---

(¹) Dans nos précédentes recherches nous avons distingué les pseudo-surfaces des surfaces, en disant que, à l'encontre de celles-ci, les arcs coordonnes ds, ds' devaient, sur les premières, seules, être regardés comme indépendants des variables u et u'. En réalité, le vrai critérium qui les classifie porte sur les *variations* réciproques de ces mêmes arcs. Autrement dit, pour les pseudo-surfaces, on a

$$d_s d_{s'} x \neq d_{s'} d_s x,$$

tandis que, pour les surfaces, au contraire,

$$d_s d_{s'} x = d_{s'} d_s x,$$

invariablement.

Quant aux arcs eux-mêmes, ils peuvent, *au même titre*, ainsi que tout ce Mémoire en fournit la preuve, être considérés, tantôt comme variables indépendantes, par exemple lorsqu'il s'agit de propriétés similaires affectant à la fois et les pseudo-surfaces et les surfaces, tantôt comme fonctions de deux autres variables quelconques, telles que u, u', lorsqu'il s'agit, notamment, de l'étude isolée d'un lieu de l'une ou de l'autre espèce.

A peine est-il besoin d'ajouter que les conditions relatées ci-dessus entraînent $p + q' \neq 0$, pour les pseudo-surfaces, $p + q' = 0$ pour les surfaces, et *vice versa*.

dans l'expression de l'élément linéaire

$$(7)\qquad dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 + ds'^2 + 2\,ds\,ds'\cos\Phi,$$

il prendra la forme

$$(7')\qquad dS^2 = A^2 du^2 + A'^2 du'^2 + 2B'' du\,du',$$

le coefficient B'', disons-le par anticipation, devant rester *nul* dans le cas particulier de la pseudo-surface annoncée.

2. Actuellement, soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du lieu $\mathfrak{F}''$, par rapport au trièdre fixe T_0. L'analogie que nous avons signalée, en commençant, entre le mode de génération d'une surface et d'une pseudo-surface, nous conduit à représenter cette dernière par le système général

$$(8)\qquad \begin{cases} dx = P\,du + Q\,du', \\ dy = P'\,du + Q'\,du', \\ dz = P''du + Q''du', \end{cases}$$

dans lequel, P, Q, P', ... désignent des fonctions absolument *quelconques* de u et u'. C'est dire qu'en principe aucune de ces trois équations n'est *intégrable*.

Que, pour représenter une pseudo-surface, l'une au moins des trois, la première, par exemple, doive être telle, c'est que, sans cette condition, on aurait forcément

$$P = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Q = \frac{\partial x}{\partial u'},$$

et alors du système tout entier on tirerait

$$x = \varphi(u, u'), \qquad y = \psi(u, u'), \qquad z = \chi(u, u'),$$

de sorte que la pseudo-surface $\mathfrak{F}''$ ne serait pas distincte de la surface F'', tangente, comme elle, au point $\mathbf{M}(x_0, y_0, z_0)$ au plan des XY; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarquons toutefois que, respectivement à ces deux cas, on peut déduire du système (8)

$$\begin{vmatrix} dx & P & Q \\ dy & P' & Q' \\ dz & P'' & Q'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} dx & \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u'} \\ dy & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u'} \\ dz & \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u'} \end{vmatrix} = 0,$$

équations qui prouvent que l'élément linéaire (7) ne sort pas, ou du plan

$$(9) \quad \begin{cases} (P'Q'' - Q'P'')(x - x_0) + (P''Q - Q''P)(y - y_0) \\ \qquad + (PQ' - QP')(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

ou de son analogue en $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots$, c'est-à-dire du plan *tangent*, mené en M, soit à $\mathcal{F}''$, soit à F''. Je dis : tangent, car on verra bientôt que les coefficients des variables sont proportionnels à a'', b'', c'', en sorte que, lorsque les paramètres u_0, u'_0 et, par eux, les coordonnées x_0, y_0, z_0 varient d'une manière continue, le premier de ces plans *enveloppe* $\mathcal{F}''$ et le second, F''.

C'est du premier d'entre eux que nous aurons à nous occuper exclusivement. Nous l'écrirons, plus simplement, ainsi

$$(9') \qquad \mathcal{A}(x - x_0) + \mathcal{A}'(y - y_0) + \mathcal{A}''(z - z_0) = 0,$$

avec

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = P'Q'' - Q'P'', \\ \mathcal{A}' = P''Q - Q''P, \\ \mathcal{A}'' = PQ' - QP'. \end{cases}$$

3. Avant de poursuivre, arrêtons-nous un instant au cas très pratique où l'on aurait

$$P = 1, \qquad Q = 0, \qquad P' = 0, \qquad Q' = 1,$$

et, par suite, $u = x$, $u' = y$. Les deux premières équations (8) disparaissent alors et il reste

$$dz = P'' dx + Q'' dy, \tag{11}$$

P'', Q'' désignant des fonctions quelconques de x et y. Que si après cela on y remplace ces variables par x_0, y_0, l'équation (9) du plan tangent en M s'écrira

$$z - z_0 = P''(x - x_0) + Q''(y - y_0). \tag{9''}$$

Pour donner de ce cas particulier une application immédiate, nous ferons observer que toute *courbe gauche* de l'espace pouvant, dans le cas le glus général, être regardée comme l'intersection de deux pseudo-surfaces, telles que

$$\begin{cases} dx = P\,dy + Q\,dz, \\ dy = P'\,dz + Q'\,dx, \end{cases} \tag{8'}$$

lieux qu'il convient de désigner par $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, la tangente

$$\frac{x - x_0}{dx_0} = \frac{y - y_0}{dy_0} = \frac{z - z_0}{dz_0},$$

au point (x_0, y_0, z_0) de la courbe choisie pourra, en vertu des *identités*

$$\frac{x - x_0}{dx_0} = \frac{P(y - y_0) - Q(z - z_0)}{P\,dy_0 + Q\,dz_0},$$

$$\frac{y - y_0}{dy_0} = \frac{P'(z - z_0) + Q'(x - x_0)}{P'\,dz_0 + Q'\,dx_0},$$

être envisagée, à son tour, comme l'*intersection* des deux plans tangents menés à $\mathfrak{F}$ et à $\mathfrak{F}'$, en ce même point.

En terminant ceci, qu'on nous permette de rappeler que c'est précisément sous la forme (11), la plus simple de toutes, que nous avons signalé pour la première fois l'existence des pseudo-surfaces, en 1888 et 1889, d'abord dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France,* puis, en 1890, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

4. Ces principes établis et ces remarques faites, revenons aux formules (6).

Des identités connues

$$dr = a\,ds + a'\,ds' = \mathrm{A}a\,du + \mathrm{A}'a'\,du' = \mathrm{P}\,du + \mathrm{Q}\,du',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on tire immédiatement

$$(12)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}}, \qquad b = \dfrac{\mathrm{P}'}{\mathrm{A}}, \qquad c = \dfrac{\mathrm{P}''}{\mathrm{A}}, \\[2mm] \dfrac{\partial a}{\partial s} = \dfrac{1}{\mathrm{A}^2}\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial u} - \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}^3}\dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial u}, \\[2mm] \dfrac{\partial a}{\partial s'} = \dfrac{1}{\mathrm{A}\mathrm{A}'}\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial u'} - \dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}^2\mathrm{A}'}\dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'}, \end{cases}$$

$$(12')\quad \begin{cases} a' = \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}'}, \qquad b' = \dfrac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{A}'}, \qquad c' = \dfrac{\mathrm{Q}''}{\mathrm{A}'}, \\[2mm] \dfrac{\partial a'}{\partial s} = \dfrac{1}{\mathrm{A}\mathrm{A}'}\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u} - \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}\mathrm{A}'^2}\dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u}, \\[2mm] \dfrac{\partial a'}{\partial s'} = \dfrac{1}{\mathrm{A}'^3}\dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u'} - \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}'^3}\dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u'}, \end{cases}$$

les *seconds termes* étant à négliger lorsqu'il s'agit de lignes de courbure ou de lignes asymptotiques, et à retenir pour les lignes géodésiques seules.

Au surplus, et sans distinction de cas d'aucune sorte, les valeurs précédentes de $a, b, c, a', \ldots$, nous donnent

$$(13)\quad \begin{cases} \mathrm{A}^2 = \mathrm{P}^2 + \mathrm{P}'^2 + \mathrm{P}''^2 = \Sigma\,\mathrm{P}^2, \\ \mathrm{A}'^2 = \mathrm{Q}^2 + \mathrm{Q}'^2 + \mathrm{Q}''^2 = \Sigma\,\mathrm{Q}^2, \\ \mathrm{B}'' = \mathrm{P}\mathrm{Q} + \mathrm{P}'\mathrm{Q}' + \mathrm{P}''\mathrm{Q}'' = \Sigma\,\mathrm{P}\mathrm{Q}, \end{cases}$$

conjointement avec

$$(14)\quad \cos\Phi = \frac{\mathrm{B}''}{\mathrm{A}\mathrm{A}'}, \qquad \sin\Phi = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}\mathrm{A}'} = \frac{1}{\mathrm{A}\mathrm{A}'}\sqrt{\mathrm{A}^2\mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}''^2},$$

ces deux dernières formules, redisons-le, ne devant être utilisées d'une manière continue que plus tard.

En attendant, servons-nous de celles qui précèdent pour mettre sous forme de déterminants les quatre composantes $-q$, p', p, $-q'$ du Tableau (2). Avec nos coordonnées actuelles, on a d'abord

$$\frac{a''}{bc'-cb'} = \frac{b''}{ca'-ac'} = \frac{c''}{ab'-ba'} = 1,$$

et, par suite,

$$(15) \quad -q = \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial s} & a & a' \\ \frac{\partial b}{\partial s} & b & b' \\ \frac{\partial c}{\partial s} & c & c' \end{vmatrix} = \frac{1}{A^3 A'} \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & P & Q \\ \frac{\partial P'}{\partial u} & P' & Q' \\ \frac{\partial P''}{\partial u} & P'' & Q'' \end{vmatrix} = \frac{D}{A^3 A'}.$$

Comme les trois autres composantes s'obtiennent en remplaçant les éléments de la première colonne du second déterminant par $\frac{\partial Q}{\partial u'}, \frac{\partial Q'}{\partial u'}, \frac{\partial Q''}{\partial u'}$ pour p', par $\frac{\partial Q}{\partial u}, \dots$ pour p, et $\frac{\partial P}{\partial u'}, \dots$ pour $-q'$, on a, en les groupant,

$$(15') \quad \begin{cases} -q = \Delta = \dfrac{D}{A^3 A'}, & p = \Delta'' = \dfrac{D''}{A^2 A'^2}, \\[2ex] p' = \Delta' = \dfrac{D'}{A A'^3}, & -q' = \Delta''_1 = \dfrac{D''_1}{A^2 A'^2}. \end{cases}$$

Servons-nous de ces premiers résultats.

1° Si l'on introduit ces valeurs (où A et A' ont été traités comme des constantes) dans les équations des lignes de courbure (3) et des lignes asymptotiques (4), elles prendront la forme

$$(3') \quad A^2 D'' du^2 - (A'^2 D - A^2 D') du\, du' - A'^2 D''_1 du'^2 = 0,$$

$$(4') \quad D\, du^2 + (D + D''_1)\, du\, du' + D'\, du'^2 = 0,$$

les différentielles du, du' pouvant, à l'occasion, être avantageusement remplacées par leurs valeurs $\frac{ds}{A}$, $\frac{ds'}{A'}$.

Ajoutons que, pour passer des pseudo-surfaces aux surfaces, il suffit de poser $p = -q'$, c'est-à-dire (15')

$$\Delta'' = \Delta''_1 \qquad \text{ou mieux} \qquad D'' = D''_1.$$

2° Quant aux lignes géodésiques (5), elles exigent un calcul tout spécial. Avant de l'entreprendre, nous adopterons les notations suivantes

$$(16)\quad \left\{ \begin{array}{llll} \frac{\partial P}{\partial u} = R, & \frac{\partial Q}{\partial u} = S, & \frac{\partial P}{\partial u'} = S_1, & \frac{\partial Q}{\partial u'} = T, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

par où l'on voit déjà que, pour revenir aux surfaces, il *suffit* d'avoir

$$S = S_1, \qquad S' = S'_1, \qquad S'' = S''_1,$$

puisque alors les trois équations (8) deviennent intégrables. En rapprochant les expressions (13) et (16) entre elles, et y adjoignant (14), par anticipation, on en tire

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \Sigma PR = A\,\frac{\partial A}{\partial u}, & \Sigma QT = A'\,\frac{\partial A'}{\partial u'}, & \Sigma QR = \frac{\partial B''}{\partial u} - A_0\,\frac{\partial A}{\partial u'}, \\ \Sigma QS = A'\,\frac{\partial A'}{\partial u}, & \Sigma PS_1 = A\,\frac{\partial A}{\partial u'}, & \Sigma PT = \frac{\partial B''}{\partial u'} - A'_0\,\frac{\partial A'}{\partial u}, \\ \Sigma QS_1 = A'_0\,\frac{\partial A'}{\partial u}, & \Sigma PS = A_0\,\frac{\partial A}{\partial u'}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

les nouveaux coefficients A_0, A'_0 étant tels que, pour $S = S_1$, ... (cas des surfaces, avons-nous dit), on a nécessairement

$$A_0 = A, \qquad A'_0 = A'.$$

Ceci posé, écrivons l'équation (5) sous la forme

$$(5') \qquad d\varphi + A\,r\,du + A'\,r'\,du' = 0,$$

et calculons, en premier lieu, les paramètres $A\,r$ et $A'\,r'$.

Pour rester sur le terrain exclusif des pseudo-surfaces, c'est-à-dire pour éviter toute condition implicite ou explicite *d'intégrabilité,* nous nous reporterons aux systèmes (2). On en tire notamment

$$r = -\Sigma a \frac{\partial a'}{\partial s}, \qquad r' = \Sigma a' \frac{\partial a}{\partial s}.$$

Or, les dérivées $\frac{\partial a'}{\partial s}$, $\frac{\partial a}{\partial s'}$ nous sont données par les formules (12) qu'il faut prendre ici, selon la remarque déjà faite, *dans toute leur intégrité.* Tenant compte, dans leur emploi, de l'hypothèse qui domine tous les calculs actuels, savoir

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou bien} \qquad B'' = \Sigma PQ = 0,$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned} A r &= -\frac{1}{AA'} \Sigma PS = -\frac{1}{A'} \frac{A_0}{A} \frac{\partial A}{\partial u'}, \\ A' r' &= \frac{1}{AA'} \Sigma QS_1 = \frac{1}{A} \frac{A'_0}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u}, \end{aligned}$$

formules qui en généralisent d'autres bien connues et dans lesquelles on pourra poser, si bon semble, par abréviation, $\frac{A_0}{A} = a_0$, $\frac{A'_0}{A'} = a'_0$.

Calculons, en second lieu, $d\varphi$, et pour cela remarquons que le triangle infinitésimal $MM'\mu$ nous donne

$$\frac{ds}{\cos\varphi} = \frac{ds'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{1}$$

ou bien

$$\frac{A\,du}{\cos\varphi} = \frac{A'\,du'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{1} = \sqrt{A^2\,du^2 + A'^2\,du'^2}.$$

Différentiant, il vient

$$\begin{aligned} d(A\,du) &= d^2S\cos\varphi - dS\sin\varphi\,d\varphi, \\ d(A'\,du') &= d^2S\sin\varphi + dS\cos\varphi\,d\varphi; \end{aligned}$$

d'où, par l'élimination de $d^2 S$,

$$dS^2\, d\varphi = A\, du . d(A'\, du') - A'\, du' . d(A\, du).$$

Il ne reste plus qu'à porter, dans l'équation ($5'$), avec les expressions ci-dessus de Ar et $A'r'$, cette valeur de $d\varphi$, où l'on aura préalablement développé les différentielles totales qu'elle contient, pour en déduire l'équation demandée des lignes géodésiques de la pseudo-surface $\mathcal{F}''$, savoir

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} & A^2 A'^2 (du\, d^2 u' - du'\, d^2 u) \\ & \quad = A^2 A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} du^3 + \left[A'^2 A \frac{\partial A}{\partial u} - A^2 (A'_0 + A') \frac{\partial A'}{\partial u} \right] du^2\, du' \\ & \quad\quad - \left[A^2 A' \frac{\partial A'}{\partial u'} - A'^2 (A_0 + A) \frac{\partial A}{\partial u'} \right] du\, du'^2 - A'^2 A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} du'^3. \end{aligned} \right.$$

Lorsque $A_0 = A$ et que $A'_0 = A'$, on retombe, comme on l'a déjà dit, sur le cas des surfaces.

Venons maintenant à la pseudo-surface minima dont nous avons, dès le début, annoncé l'étude.

II.

EXEMPLE D'UN PSEUDO-HÉLICOÏDE GAUCHE, A PLAN DIRECTEUR. SES LIGNES REMARQUABLES.

5. Parmi les pseudo-surfaces, en nombre infini, que les équations générales (8) sont aptes à représenter, il n'en est pas de plus intéressantes, assurément, que celles qui *avoisinent* des surfaces, et ont naturellement celles-ci pour *limites*.

De ce nombre est le pseudo-hélicoïde particulier dont il va être question. Mais auparavant, soient

$$(19)\qquad x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta, \qquad z = a\theta,$$

les équations de l'hélicoïde gauche ordinaire H. En les différentiant, on a

$$(20)\qquad \begin{cases} dx = -\rho \sin\theta \, d\theta + \cos\theta \, d\rho, \\ dy = \rho \cos\theta \, d\theta + \sin\theta \, d\rho, \\ dz = a \, d\theta. \end{cases}$$

Pour produire, *ad libitum*, un pseudo-hélicoïde, voisin du premier, il n'y a qu'à poser, par exemple,

$$(21)\qquad \begin{cases} dx = -\rho \sin\theta \, d\theta + (1+\alpha)\cos\theta \, d\rho, \\ dy = \rho \cos\theta \, d\theta + (1+\alpha)\sin\theta \, d\rho, \\ dz = a \, d\theta. \end{cases}$$

Ainsi altérées, les deux premières équations du système cessent d'être intégrables, tandis que, du même coup, l'hélicoïde H subit une déformation, que l'on peut qualifier de *dilatation* ou de *contraction vectorielle*, selon que la *constante* α est positive ou négative.

La raison en est qu'en projection, sur le plan fixe des xy, l'élément linéaire devient

$$dS_z^2 = \rho^2 \, d\theta^2 + d[(1+\alpha)\rho]^2,$$

forme significative qui justifie, à elle seule, notre dénomination.

Au surplus, je dis que le nouveau lieu géométrique $\mathfrak{H}_\alpha$, défini par le système (21), n'est autre qu'une *pseudo-surface minima*.

En effet, si l'on pose $u = \theta$, $u' = \rho$, les formules (13) donneront

$$A^2 = \rho^2 + a^2, \qquad A'^2 = (1+\alpha)^2, \qquad B'' = 0,$$

et, par suite, l'élément linéaire proprement dit aura, d'après (7'), pour expression

$$(22)\qquad dS^2 = (\rho^2 + a^2)\, d\theta^2 + (1+\alpha)^2 \, d\rho^2.$$

D'autre part, comme, en vertu des relations (15) et (15′), on a

$$(23)\qquad \begin{cases} D = 0, & D'' = a(1+\alpha)^2, \\ D' = 0, & D''_1 = a(1+\alpha), \end{cases}$$

il s'ensuit que la condition caractéristique des surfaces $D'' = D''_1$ (n° 4) n'est rien moins que satisfaite; d'où cette première conséquence : *Le lieu* $\mathfrak{H}_\alpha$ *n'est pas une surface.*

Pour en reconnaître la nature, appliquons-lui (puisque sa forme nous y autorise) les équations des lignes remarquables précédemment établies, équations qui conviennent bien au cas actuel, puisqu'il comporte $B'' = 0$ ou $\Phi = \frac{\pi}{2}$.

a. En ce qui concerne d'abord les lignes de courbure (3′), on trouve

$$(\rho^2 + a^2)\, d\theta^2 - (1+\alpha)\, d\rho^2,$$

et, par suite,

$$\frac{\theta}{\sqrt{1+\alpha}} = \log \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2}}{a} + C.$$

Au surplus, si l'on remonte à (3), on verra que la précédente revient à

$$(1+\alpha)\, ds^2 - ds'^2 = 0.$$

Or ceci accuse deux directions *obliques,* également inclinées sur les axes mobiles MX, MY; ce que l'on sait être le propre exclusif des lignes de courbure d'une *pseudo-surface.*

b. De son côté, l'équation (4′) des lignes asymptotiques se réduit à

$$d\rho\, d\theta = 0,$$

c'est-à-dire, en multipliant par $(1+\alpha)\sqrt{\rho^2 + a^2}$, à

$$ds\, ds' = 0.$$

Ces lignes sont donc rectangulaires, comme les axes coordonnés mobiles qu'elles ont pour tangentes, à l'origine, propriété qu'en somme permettait de prévoir la condition d'orthogonalité $q - p' = 0$, fournie directement par l'équation (4), puisque cette même condition, pouvant être mise sous la forme

$$A'^2 D + A^2 D' = 0, \tag{24}$$

se trouve, d'après (23), identiquement satisfaite.

Concluons-en que le lieu $\mathfrak{H}_\alpha$ n'est pas une pseudo-surface quelconque, mais, par définition, une pseudo-surface *minima*. C. Q. F. D.

L'indicatrice en M peut aussi servir à confirmer le fait; car elle n'est autre que l'hyperbole *équilatère*

$$XY = \frac{1+\alpha}{2+\alpha}\left(a + \frac{\rho^2}{a}\right).$$

c. Passons aux lignes géodésiques. On voit d'abord qu'en ayant égard aux valeurs de A et A' ci-dessus, les relations (17) se réduisent à

$$A\frac{\partial A}{\partial \theta} = 0, \qquad A'\frac{\partial A'}{\partial \rho} = 0, \qquad A'_0\frac{\partial A'}{\partial \theta} = 0,$$

$$A'\frac{\partial A'}{\partial \theta} = 0, \qquad A\frac{\partial A}{\partial \rho} = \rho, \qquad A_0\frac{\partial A}{\partial \rho} = (1+\alpha)\rho;$$

substituant dans (18), on trouve

$$\left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\right)\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - (2+\alpha)\frac{d\rho^2}{\partial\theta^2} - \frac{\rho^2 + a^2}{1+\alpha} = 0, \tag{25}$$

équation qui, intégrée, donne

$$\theta = \int \frac{(1+\alpha)\lambda\, d\rho}{\sqrt{(\rho^2 + a^2)[(\rho^2 + a^2)^{1+\alpha} - \lambda^2]}} + C,$$

λ désignant une première *constante*.

Comme vérification, pour $\alpha = 0$, on retombe exactement sur les équations correspondantes des lignes géodésiques de l'hélicoïde H.

6. Il ne sera pas sans intérêt de faire remarquer, en dernier lieu, au sujet du système (21), que si ses deux premières équations ne sont pas intégrables, du moins, en multipliant les deux membres de la première par $(\cos\theta)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, et ceux de la seconde par $(\sin\theta)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, ces facteurs *intégrants* rendront les seconds membres différentielles exactes, si bien que la surface résultante de leur intégration, savoir

$$(19')\qquad \begin{cases} x' = (1+\alpha)\rho(\cos\theta)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \\ y' = (1+\alpha)\rho(\sin\theta)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \\ z' = a\theta, \end{cases}$$

sera, pour le moins, aussi étroitement liée au pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$ que ne l'est l'hélicoïde H lui-même.

III.

APPLICABILITÉ DU PSEUDO-HÉLICOÏDE PRÉCÉDENT SUR UNE ALYSSÉIDE VECTORIELLEMENT DÉFORMÉE.

7. Arrivons à ce que, dans le sens conventionnel du mot, on peut appeler l'*applicabilité* du pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$ sur telle ou telle pseudo-surface, ou même surface, proposées.

A cet effet, il convient de rappeler d'abord qu'une surface de révolution quelconque Σ peut être définie par le système d'équations

$$(26)\qquad x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = \varphi(\rho),$$

lequel, différentié, donne

$$(27)\qquad \begin{cases} dx = -\rho\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, d\rho, \\ dy = \rho\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, d\rho, \\ dz = \varphi'(\rho)\, d\rho. \end{cases}$$

Cela posé, considérons cet autre système analogue

$$(28)\qquad \begin{cases} dx = -\dfrac{\rho_1}{1+\alpha}\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, d\rho_1, \\ dy = \dfrac{\rho_1}{1+\alpha}\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, d\rho_1, \\ dz = \varphi'(\rho_1)\, d\rho_1, \end{cases}$$

dans lequel (abstraction faite de l'indice qui aura bientôt son explication) les deux premières différentielles ne sont plus exactes et accusent, dans la surface Σ, une déformation vectorielle de même genre que celle constatée, dans le paragraphe précédent, au sujet de la pseudo-surface $\mathfrak{S}_\alpha$. Quoi qu'il en soit de cette particularité, on pourrait croire sans invraisemblance qu'il va être, ici encore, question de pseudo-surfaces. Eh bien! non. Chose étonnante, le nouveau lieu Σ_α est encore *une surface*.

En effet, si l'on pose $u = \theta$, $u' = \rho_1$, on aura (13)

$$A^2 = \frac{\rho_1^2}{(1+\alpha)^2}, \qquad A'^2 = 1 + \varphi'^2, \qquad B'' = 0,$$

d'où l'on déduit d'abord

$$(29)\qquad dS^2 = \frac{\rho_1^2}{(1+\alpha)^2}\, d\theta^2 + (1+\varphi'^2)\, d\rho_1^2.$$

Mais on a, d'autre part,

$$(30)\qquad \begin{cases} D = -\dfrac{\rho_1^2}{(1+\alpha)^2}\varphi', \qquad D'' = 0, \\ D' = -\dfrac{\rho_1}{1+\alpha}\varphi'', \qquad D''_1 = 0. \end{cases}$$

Remontant à la condition caractéristique des surfaces $D'' = D''_1$, l'on voit qu'elle se trouve *identiquement* vérifiée. Donc le lieu Σ_α est bien une surface, ainsi que nous l'avions annoncé.

Autre preuve : si l'on forme l'équation de ses lignes de courbure, on trouvera, à un facteur négligeable près,

$$d\rho_1\, d\theta = 0 \qquad \text{ou} \qquad ds\, ds' = 0.$$

Elles sont donc *rectangulaires*, ainsi que l'étaient naguère, rappelons-le, les lignes asymptotiques, soit de H, soit de $\mathfrak{H}_\alpha$.

8. Ces généralités établies, choisissons, comme exemple, l'alysséide A_α. Elle sera représentée par les deux premières équations (28) jointes à celle de la chaînette méridienne

$$(31) \qquad \rho_1 = \frac{a_1}{2}\left(e^{\frac{z}{a_1}} + e^{-\frac{z}{a_1}}\right),$$

ou bien

$$(31') \qquad \frac{z}{a_1} = \log \frac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - a_1^2}}{a_1},$$

équations d'où l'on déduit

$$\frac{dz}{d\rho_1} = \varphi'(\rho_1) = \frac{a_1}{\sqrt{\rho_1^2 - a_1^2}}.$$

Cela étant, posons

$$(32) \qquad a_1 = a(1+\alpha), \qquad \rho_1^2 - a_1^2 = \sigma_1^2 = (1+\alpha^2)\rho^2.$$

Dans σ_1, on reconnaît une portion d'arc (rectifiable) de chaînette, compté à partir du point le plus bas de la courbe. On en conclut successivement

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (1+\alpha)^2(\rho^2 + a^2), \\ \rho_1\, d\rho_1 &= (1+\alpha)^2 \rho\, d\rho. \end{aligned}$$

Portant le tout dans la valeur (29) de l'élément linéaire de Σ_α, il devient pour notre alysséide déformée

$$dS^2 = (\rho^2 + a^2)\,d\theta^2 + (1+\alpha)^2\,d\rho^2, \tag{33}$$

expression *identique* à celle obtenue (29) pour l'élément linéaire du pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$. De là cette propriété :

L'alysséide, vectoriellement déformée d'après une certaine loi, est encore une VRAIE SURFACE. *De plus, elle est exactement applicable sur un hélicoïde gauche, déformé d'après une loi analogue à la précédente, mais transformé, lui, par cette opération, en* PSEUDO-SURFACE.

9. Demandons-nous, à ce propos, si, en restant surface, l'alysséide déformée A_α reste, en outre, surface *minima?*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que son indicatrice soit une hyperbole *équilatère*. Or l'équation *réduite* de l'indicatrice étant

$$-qX^2 + p'Y^2 = 1,$$

peut, à l'aide des déterminants (15), se mettre sous la forme

$$A'^2 D X^2 + A^2 D' Y^2 = A^3 A'^3,$$

et, conséquemment, d'après (30), sous celle-ci

$$(1-\alpha)(1+\varphi'^2)\varphi' X^2 + \rho_1 \varphi'' Y^2 = -\rho_1 (1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Mais, de l'équation (31') de la chaînette, on tire

$$\varphi'(\rho_1) = \frac{a_1}{\sqrt{\rho_1^2 - a_1^2}}, \qquad \varphi''(\rho_1) = -\frac{a_1 \rho_1}{(\rho_1^2 - a_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituant, il vient pour l'indicatrice cherchée

$$(1+\alpha)X^2 - Y^2 = -\frac{\rho_1^2}{a_1}.$$

C'est une hyperbole, mais qui n'est équilatère que si $\alpha = 0$.

Donc, bien que l'alysséide A soit une surface minima, l'alysséide déformée A_α ne l'est pas. Par contre, on a vu que l'hélicoïde H, devenu $\mathfrak{H}_\alpha$, constituait, dans ce deuxième état, une *pseudo-surface minima*.

Nous terminerons ceci, en écrivant l'équation différentielle des lignes géodésiques de l'alysséide A_α. Calculée, à l'aide de la formule (18), elle est, toutes réductions faites,

$$(25') \quad \left\{ \begin{aligned} &\rho_1 \frac{d^2\rho_1}{d\theta^2} - \left[\frac{a_1^2}{\rho_1^2 - a_1^2} + (2+\alpha)\right]\frac{d\rho_1^2}{d\theta^2} \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{1+\alpha}(\rho_1^2 - a_1^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

On vérifie que, eu égard aux relations (32), elle *coïncide* avec l'équation (25) des lignes géodésiques de la pseudo-surface $\mathfrak{H}_\alpha$; ce à quoi l'on pouvait d'ailleurs s'attendre.

IV.

CONSÉQUENCES ET GÉNÉRALISATION DIVERSES.

Coordonnées obliques.

10. Puisqu'on ne saurait nier que la propriété qui caractérise toute surface consiste dans l'orthogonalité de ses lignes de courbure, nous sommes en droit de tirer de tout ce qui précède, entre autres conséquences, celles-ci :

Théorème. — *Il existe des surfaces, non susceptibles d'être représentées par un système de trois équations* FINIES, *de la forme*

$$x = \varphi(u, u'), \qquad y = \psi(u, u'), \qquad z = \chi(u, u'),$$

ni, par conséquent, par une seule, de la forme

$$F(x, y, z) = 0.$$

En effet, la condition qui caractérise toute surface étant (n° 4)

$$(34)\qquad p + q' = 0 \quad \text{ou} \quad D'' = D''_1,$$

elle revient, explicitement (15), à

$$(34')\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial u'} & P & Q \\ \frac{\partial Q'}{\partial u} - \frac{\partial P'}{\partial u'} & P' & Q' \\ \frac{\partial Q''}{\partial u} - \frac{\partial P''}{\partial u'} & P'' & Q'' \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette condition générale est sans doute vérifiée par

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u'}, \qquad \frac{\partial Q'}{\partial u} = \frac{\partial P'}{\partial u'}, \qquad \frac{\partial Q''}{\partial u} = \frac{\partial P''}{\partial u'},$$

ou, sous une autre forme (16), par

$$S = S_1, \qquad S' = S'_1, \qquad S'' = S''_1,$$

conditions partielles qui expriment que chacune des équations fondamentales (8) est intégrable. Mais cette même condition (34′) est vérifiée aussi, par exemple, par

$$P\frac{\partial Q'}{\partial u} = P'\frac{\partial Q}{\partial u}, \qquad P\frac{\partial P'}{\partial u'} = P'\frac{\partial P}{\partial u'}, \qquad P'' = \frac{\partial Q''}{\partial u} = \frac{\partial P''}{\partial u'} = 0;$$

et c'est justement le cas de l'alysséide déformée A_α (n° 8).

Corollaire I. — A l'instar des pseudo-surfaces, il est telle surface qui n'est exprimable que par trois équations différentielles de la forme (8), l'une d'elles au moins étant supposée *non intégrable.*

Nous n'en voulons d'autres preuves que l'exemple que nous en ont offert (n^{os} 7 et 8) les surfaces Σ_α et, notamment, l'alysséide A_α.

Corollaire II. — Une même forme de l'élément linéaire peut convenir, *à la fois,* et à une pseudo-surface, et à une surface.

Ainsi en a-t-il été en effet (22) et (33) pour le pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$ et l'alysséide A_α.

Corollaire III. — Si la connaissance de l'élément linéaire d'une surface (ordinaire) suffit à la détermination de ses lignes géodésiques, il n'en est plus de même quand il s'agit de pseudo-surfaces.

On a vu effectivement (n° 4), et la suite le démontrera plus généralement encore, qu'outre les trois fonctions de Gauss E, F, G et leurs dérivées, c'est-à-dire, d'après nos notations, A, A', B'' et les leurs, deux nouvelles fonctions A_0, A'_0 (qui coïncident, il est vrai, avec A, A' dans le cas des surfaces) sont alors nécessaires. D'où cette conséquence imprévue, savoir : que la considération de ce que l'on nomme le dS^2 ne saurait prendre, dans cette deuxième théorie, l'importance (exagérée, à notre avis) qu'on lui accorde dans la première. Ajoutons qu'on en peut dire autant des *paramètres différentiels* $\Delta\varphi$ et $\Delta_2\varphi$ de Beltrami, quoique convenablement adaptés aux pseudo-surfaces.

11. En présence de faits pareils, aussi curieux que gros de conséquences, on nous saura gré sans doute de chercher à en élargir le plus possible, le domaine. C'est ce que nous nous proposons de faire en reprenant, à grands traits, avec des coordonnées *obliques* (jusqu'ici inutiles) nos premières formules.

Et d'abord, substituons au triangle trirectangle mobile dont il a été exclusivement fait usage jusqu'à présent, deux trièdres birectangles supplémentaires, le premier **MXYZ** ou **T**, d'angle aigu **Φ**, le second **MX₁Y₁Z** ou **T₁**, d'angle obtus $\pi - \Phi$, ceux-là mêmes que nous avons déjà introduits (*Nouvelles Annales*, p. 52; 1900) et qui nous ont fourni les deux systèmes corrélatifs

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial a}{\partial u} = a'_1 r - a''_1 q \sin\Phi,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\frac{\partial a_1}{\partial s} = \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial a_1}{\partial u} = a' n_1 - a'' q_1 \sin\Phi,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

les cosinus directeurs $a, b, c, a', \ldots$ et $a_1, b_1, c_1, a'_1, \ldots$ étant liés entre eux et à **Φ** par les relations

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 \sin\Phi &= a - a'\cos\Phi,\\ a'_1 \sin\Phi &= a' - a\cos\Phi,\\ a''_1 &= a'', \end{aligned}\right.$$

et les composantes n, r, n_1, r_1, par celles-ci

$$(37)\qquad n = r + \frac{\partial\Phi}{\partial s} = r_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial s} = n_1.$$

Du système (35), notamment, on déduit

$$p\sin\Phi = p_1 - q_1\cos\Phi = \quad \Sigma a''_1 \frac{\partial a'}{\partial s},$$

$$q\sin\Phi = q_1 - p_1\cos\Phi = -\Sigma a''_1 \frac{\partial a}{\partial s};$$

et l'on a ensuite des valeurs analogues pour $p'\sin\Phi, \ldots$. Or, par des considérations dont l'exposé ne saurait trouver place ici, on peut prouver que, avec nos coordonnées actuelles, l'équation des lignes de courbure (3) devient

$$p_1\, ds^2 - (q_1 + p'_1)\, ds\, ds' + q'_1\, ds'^2 = 0,$$

ou, équivalemment,

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &(p+q\cos\Phi)\,ds^2\\ &\quad+[(q+p\cos\Phi)+(p'+q'\cos\Phi)]\,ds\,ds'\\ &\qquad\qquad+(q'+p'\cos\Phi)\,ds'^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

tandis que l'équation des lignes asymptotiques conserve sa première forme (4), savoir

$$(39)\qquad -q\,ds^2+(p-q')\,ds\,ds'+p'\,ds'^2=0.$$

Ceci posé, si l'on tient compte de ce que, présentement,

$$\frac{a''}{bc'-cb'}=\frac{b''}{ca'-ac'}=\frac{c''}{ab'-ba'}=\frac{1}{\sin\Phi},$$

on verra sans peine que, pour étendre à nos nouvelles coordonnées le Tableau (15), il suffit d'y remplacer la composante q, dont il fournit la valeur, par

$$q\sin^2\Phi = q\,\frac{A^2A'^2-B''^2}{A^2A'^2}=q\,\frac{H^2}{A^2A'^2}.$$

Et comme la règle reste la même pour les trois autres composantes p', p, $-q'$, il suit de leur groupement que l'on peut former la suite de rapports égaux

$$(40)\qquad \frac{-q}{\frac{A'}{A}D}=\frac{p'}{\frac{A}{A'}D'}=\frac{p}{D''}=\frac{-q'}{D''_1}=\frac{1}{H^2},$$

laquelle, remarquons-le, entraîne, entre autres combinaisons, celle-ci

$$pq'-qp'=\frac{DD'-D''D''_1}{H^4}.$$

Quoi qu'il en soit, si l'on porte les valeurs (40) dans l'équation (38) et qu'on ait égard à ce que $\cos\Phi=\frac{B''}{AA'}$, les lignes de courbure de $\mathfrak{F}''$ deviendront

$$(38') \quad \begin{cases} (A^2 D'' - B'' D)\, du^2 \\ \quad - [(A'^2 D - A^2 D') - B''(D'' - D''_1)]\, du\, du' \\ \qquad\qquad - (A'^2 D''_1 - B'' D')\, du'^2 = 0. \end{cases}$$

On aura de même pour ses lignes asymptotiques

$$(39') \qquad D\, du^2 + (D'' + D''_1)\, du\, du' + D' du'^2 = 0,$$

comme aussi pour ses *ombilics*

$$\frac{A^2}{D} = \frac{A'^2}{D'} = \frac{2B''}{D'' + D''_1}.$$

12. Le cas particulier de $u = x$, $u' = y$, déjà signalé au nº 3, mérite d'être examiné à part. On a d'abord, en vue de l'expression de dS^2, et en convenant de poser $P'' = p$, $Q'' = q$,

$$(41) \qquad A^2 = 1 + p^2, \qquad A'^2 = 1 + q^2, \qquad B'' = pq;$$

on trouve ensuite

$$(42) \quad \begin{cases} D = \dfrac{\partial p}{\partial x} = r, & D'' = \dfrac{\partial q}{\partial x} = s, \\ D' = \dfrac{\partial q}{\partial y} = t, & D''_1 = \dfrac{\partial p}{\partial y} = s_1, \end{cases}$$

ce qui permet, notons-le, de donner à la suite de rapports égaux (40) la forme suivante

$$(40') \quad \frac{-q}{\left(\dfrac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right) r} = \frac{p'}{\left(\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}}\right) t} = \frac{p}{s} = \frac{-q'}{s_1} = \frac{1}{1 + p^2 + q^2}.$$

Négligeant toutefois, provisoirement, ce dernier résultat, et nous bornant à substituer, dans (38'), les valeurs précédentes (41) et (42), il vient pour les lignes de courbure de $\mathfrak{F}''$

$$(38'')\quad \begin{cases} [(1+p^2)s - pqr]\,dx^2 \\ \quad -[(1+q^2)r - pq(s-s_1)-(1+p^2)t]\,dx\,dy \\ \qquad\qquad -[(1+q^2)s_1 - pqt]\,dy^2 = 0. \end{cases}$$

On a semblablement pour ses lignes asymptotiques

$$(39'')\qquad r\,dx^2 + (s+s_1)\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

A côté de ces formes, un peu prolixes, il ne sera pas superflu de signaler celles, beaucoup plus condensées, qui suivent

$$(38''')\qquad dq(dx + p\,dz) - dp(dy + q\,dz) = 0,$$

$$(39''')\qquad dp\,dx - dq\,dy = 0,$$

formes qu'on établit aisément à l'aide des différentielles totales suivantes, propres aussi, remarquons-le, à *généraliser* la transformation de Legendre :

$$dz = p\,dx + q\,dy,\qquad dp = r\,dx + s_1\,dy,\qquad dp = s\,dx + t\,dy.$$

Ajoutons, en guise de corollaire, que les *rayons principaux* de $\mathfrak{F}''$, en M, sont donnés par l'équation du second degré

$$(\mathrm{R})\quad \begin{cases} [4rt - (s+s_1)]\,\mathrm{R}^2 \\ \quad -4[(1+q^2)r - pq(s+s_1) \\ \qquad\qquad +(1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{R} \\ \qquad\qquad\qquad + 4(1+p^2+q^2)^2 = 0. \end{cases}$$

Du deuxième terme de cette équation, on tire la condition caractéristique des *pseudo-surfaces minima,* savoir

$$(1+q^2)r - pq(s+s_1) + (1+p^2)t = 0,$$

laquelle concorde pleinement (40′) avec ces autres formes non moins utiles

$$-q + p' - (p - q')\cos\Phi = 0,$$

voire,

$$\mathrm{A}'^2\mathrm{D} + \mathrm{A}^2\mathrm{D}' - \mathrm{B}''(\mathrm{D}'' + \mathrm{D}''_1) = 0.$$

Enfin de l'égalité supposée des racines de la même équation résultent, pour $\mathcal{F}''$, les *ombilics*

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s+s_1}{2pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

13. Venons maintenant à l'équation des lignes géodésiques de notre pseudo-surface, et cela, dans le cas général d'abord, puis, dans le cas particulier de $u = x$, $u' = y$.

A cet effet, rappelons que, sous la condition $\varphi + \varphi' = \Phi$, ces lignes peuvent être représentées (37) par l'une ou l'autre des équations *équivalentes*

$$\begin{aligned} d\varphi + \mathrm{A}r\,du + \mathrm{A}'r'\,du' &= 0, \\ d\varphi' - \mathrm{A}n\,du - \mathrm{A}'n'\,du' &= 0, \end{aligned}$$

et, conséquemment, par leur combinaison,

$$(43)\qquad d\varphi - d\varphi' + \mathrm{A}(n+r)\,du + \mathrm{A}'(n'+r')\,du' = 0.$$

Rappelons aussi qu'entre les angles φ, φ', Φ on a les relations trigonométriques

$$\frac{\mathrm{A}\,du}{\sin\varphi'} = \frac{\mathrm{A}'\,du'}{\sin\varphi} = \frac{d\mathrm{S}}{\sin\Phi},$$

conjointement avec

$$\begin{aligned} d\mathrm{S}^2 &= \mathrm{A}^2\,du^2 + \mathrm{A}'^2\,du'^2 + 2\mathrm{A}\mathrm{A}'\cos\Phi\,du\,du', \\ &= \mathrm{A}^2\,du^2 + \mathrm{A}'^2\,du'^2 + 2\mathrm{B}''\,du\,du'. \end{aligned}$$

Cela étant, des systèmes (35), (35') et de leurs analogues, on tire d'abord

$$\begin{aligned} n &= -\Sigma a_1 \frac{\partial a'}{\partial s} = \Sigma a' \frac{\partial a_1}{\partial s}, \\ r' &= \Sigma a'_1 \frac{\partial a}{\partial s'} = -\Sigma a \frac{\partial a'_1}{\partial s'}. \end{aligned}$$

En s'aidant ensuite des formules (12) et (17), on obtient, par deux voies distinctes (qui se vérifient mutuellement), les expressions suivantes

$$(44)\quad \begin{cases} An = Ar + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = -\dfrac{1}{A'\sin\Phi}\left(\dfrac{A_0}{A}\dfrac{\partial A}{\partial u'} - \dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\[2ex] A'r' = A'n' - \dfrac{\partial\Phi}{\partial u'} = \dfrac{1}{A\sin\Phi}\left(\dfrac{A'_0}{A'}\dfrac{\partial A'}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right); \end{cases}$$

d'où découlent celles, faciles à former, de $A(n+r)$ et $A'(n'+r')$.

Que si, en second lieu, on calcule la différence $d\varphi - d\varphi'$ par le même procédé qui nous a donné $d\varphi$, au n° 4, on trouvera, en réunissant tous les résultats, une équation finale que l'on peut écrire abréviativement ainsi

$$(45)\quad \begin{cases} (A^2A'^2 - B''^2)(du\,d^2u' - du'\,d^2u) \\ \quad = \mathfrak{M}\,du^3 + \mathfrak{N}\,du^2\,du' - \mathfrak{N}'\,du\,du'^2 - \mathfrak{M}'\,du'^3, \end{cases}$$

à condition de poser

$$(46)\quad \begin{cases} \mathfrak{M} = A^3A'\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi + A^2A_0\dfrac{\partial A}{\partial u'} - A^3\dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi \\[2ex] \mathfrak{N} = A^2A'^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi\cos\Phi + \left[A'^2A\dfrac{\partial A}{\partial u} - A^2(A'_0 + A')\dfrac{\partial A'}{\partial u}\right]\sin^2\Phi \\[2ex] \qquad + AA'\left[(2A_0 + A)\dfrac{\partial A}{\partial u'} - (A'_0 + 2A')\dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right]\cos\Phi. \end{cases}$$

Quant aux deux autres fonctions, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{M}'$, elles se déduisent de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, en remplaçant A_0, A, A', u, u' par A'_0, A', A, u', u et *vice versa*.

Hâtons-nous d'ajouter qu'à cette première forme il pourra être *pratiquement* utile de substituer, à l'occasion, cette autre qui implique B'' et ses dérivées, au lieu de $\cos\Phi$ et des siennes,

$$(46')\quad \begin{cases} \mathfrak{M} = A^2A_0\dfrac{\partial A}{\partial u'} + B''A\dfrac{\partial A}{\partial u} - A^2\dfrac{\partial B''}{\partial u}, \\[2ex] \mathfrak{N} = A'^2A\dfrac{\partial A}{\partial u} - A^2(A'_0 + A')\dfrac{\partial A'}{\partial u} \\[2ex] \qquad + B''(2A_0 + A)\dfrac{\partial A}{\partial u'} - B''\dfrac{\partial B''}{\partial u}. \end{cases}$$

14. Plaçons ici une remarque importante. Les valeurs ci-dessus de An et $A'r'$, ou mieux, celles de Ar et $A'r'$ nous permettent de généraliser ce que, dans la question présente, on nomme communément le *théorème de Gauss*. On a en effet (*Nouvelles Annales*, p. 57; 1900)

$$\frac{\partial(Ar)}{\partial u'} - \frac{\partial(A'r')}{\partial u} = AA'(pq' - qp')\sin\Phi = HK''.$$

Donc, et c'est là le point essentiel, K'', c'est-à-dire, par analogie, la *courbure totale* d'une pseudo-surface, peut s'exprimer, non pas à l'aide des *trois* fonctions qui suffisent à définir son élément linéaire, mais des *cinq* fonctions A, A', A_0, A'_0, B'' et de leurs dérivées qu'exige (aux dérivées près de A_0, A'_0) l'équation différentielle de ses lignes géodésiques. Donnons à cette courbure totale sa meilleure forme.

A cet effet, si nous remontons au n° **11**, nous y verrons que l'on peut aussi écrire

$$K'' = \frac{DD' - D''D''_1}{H^4};$$

d'où l'on conclut, en s'aidant des formules (13) et suivantes,

$$DD' = \begin{vmatrix} \Sigma RT & \Sigma PT & \Sigma QT \\ \Sigma PR & \Sigma P^2 & \Sigma PQ \\ \Sigma QR & \Sigma PQ & \Sigma Q^2 \end{vmatrix},$$

$$D''D''_1 = \begin{vmatrix} \Sigma SS_1 & \Sigma PS & \Sigma QS \\ \Sigma PS_1 & \Sigma P^2 & \Sigma PQ \\ \Sigma QS_1 & \Sigma PQ & \Sigma Q^2 \end{vmatrix}.$$

D'autre part, les valeurs (16) nous donnent

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial u'} = \frac{\partial R}{\partial u'} = \frac{\partial S_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial u\,\partial u'} = \frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial u'}.$$

Posant donc, pour abréger,

$$J = \Sigma(RT - SS_1) = \frac{\partial^2 B''}{\partial u\,\partial u'} - \frac{\partial}{\partial u'}\left(A_0 \frac{\partial A}{\partial u'}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u}\right),$$

il vient finalement

$$DD' - D''D''_1$$

$$= \begin{vmatrix} J & \frac{\partial B''}{\partial u'} - A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} & A' \frac{\partial A'}{\partial u} \\ A \frac{\partial A}{\partial u} & A^2 & B'' \\ \frac{\partial B''}{\partial u} - A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} & B'' & A'^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} & A' \frac{\partial A'}{\partial u} \\ A \frac{\partial A}{\partial u'} & A^2 & B'' \\ A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} & B'' & A'^2 \end{vmatrix}.$$

C'est l'expression que nous voulions obtenir. Pour qu'elle convienne aux surfaces, il suffit d'y faire $A_0 = A$, $A'_0 = A'$.

15. Après cette digression et à titre de développement *naturel* du sujet qui nous occupe, il importe de se demander : 1° si les lignes géodésiques d'une pseudo-surface ont, elles aussi, en chacun de leurs points, leur plan osculateur *normal* à cette même pseudo-surface; 2° si elles mesurent le plus court chemin entre deux quelconques de leurs points?

A cela, il faut répondre par l'affirmative. En effet, au moyen de considérations identiques à celles qui ont cours pour les surfaces, et le calcul des variations aidant (Serret, t. II, p. 719), on peut s'assurer que les lignes géodésiques de $\mathfrak{F}''$ peuvent s'écrire (10)

$$(47) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}\, d\left(\frac{dz}{dS}\right) - \mathcal{A}''\, d\left(\frac{dx}{dS}\right) = 0, \\ \mathcal{A}'\, d\left(\frac{dz}{dS}\right) - \mathcal{A}''\, d\left(\frac{dy}{dS}\right) = 0. \end{cases}$$

En associant à ce système les deux relations usuelles

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$dS\, d^2S = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z,$$

on en déduit, de deux manières différentes, l'équation *unique*

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{A}(dy\, d^2z - dz\, d^2y) + \mathcal{A}'(dz\, d^2x - dx\, d^2z) \\ &\qquad\qquad + \mathcal{A}''(dx\, d^2y - dy\, d^2x) = 0. \end{aligned}\right.$$

Mais, dans cette équation, dx, dy, dz sont les *données* mêmes (8) du problème. Si donc, après en avoir tiré (16) les différentielles secondes

$$d^2x = \mathrm{P}\, d^2u + \mathrm{Q}\, d^2u' + \mathrm{R}\, du^2 + (\mathrm{S} + \mathrm{S}_1)\, du\, du' + \mathrm{T}\, du'^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on substitue le tout dans l'équation (48), on obtiendra, pour les lignes géodésiques de $\mathcal{F}''$, une forme nouvelle qui, développée, se trouve coïncider parfaitement avec celles que nous connaissons déjà. C. Q. F. D.

Bornons-nous à vérifier qu'il en est bien ainsi dans le cas simple où $u = x$, $u' = y$. On a alors (nos 3 et 12)

$$dz = \mathrm{p}\, dx + \mathrm{q}\, dy,$$

et, par suite, (42)

$$d^2z = \mathrm{p}\, d^2x + \mathrm{q}\, d^2y + \mathrm{r}\, dx^2 + (\mathrm{s} + \mathrm{s}_1)\, dx\, dy + \mathrm{t}\, dy^2.$$

Mais, de leur côté, les égalités (10) se réduisent ici à

$$\mathcal{A} = -\mathrm{p}, \qquad \mathcal{A}' = -\mathrm{q}, \qquad \mathcal{A}'' = 1;$$

d'où, finalement, pour l'équation cherchée, un résultat que l'on peut écrire [1]

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &(1 + \mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2)(dx\, d^2y - dy\, d^2x) \\ &\quad = (\mathrm{p}\, dy - \mathrm{q}\, dx)[\mathrm{r}\, dx^2 + (\mathrm{s} + \mathrm{s}_1)\, dx\, dy + \mathrm{t}\, dy^2]. \end{aligned}\right.$$

---

[1] De ce résultat il n'est pas sans intérêt de rapprocher cet autre

$$d\mathrm{S}\, d^2\mathrm{S} = (\mathrm{p}\, dx + \mathrm{q}\, dy)[\mathrm{r}\, dx^2 + (\mathrm{s} + \mathrm{s}_1)\, dx\, dy + \mathrm{t}\, dy^2],$$

que fournit, sans peine, la différentiation de l'élément linéaire actuel.

Que si, pour le mettre à l'épreuve, on y fait $s = s_1$ on retombe très exactement sur une forme bien connue de l'équation des lignes géodésiques de la *surface* définie par l'équation $z = f(x, y)$.

Voyons, en second lieu, ce que vont nous donner nos précédentes méthodes. Et d'abord, en s'aidant des formules (17), et observant, entre autres particularités, que

$$\frac{\partial B''}{\partial u} = \Sigma P \frac{\partial Q}{\partial u} + \Sigma Q \frac{\partial P}{\partial u} = \Sigma PS + \Sigma QR,$$

on passera, sans nouveaux calculs, de la forme (46′) obtenue pour les fonctions $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, à la forme *mixte*, plus avantageuse, suivante

$$(46'') \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M} &= B'' \,\Sigma PR - A^2 \Sigma QR, \\ \mathfrak{N} &= A'^2 \Sigma PR - A^2 \Sigma Q(S + S_1) \\ &\qquad + B'' \Sigma P(S + S_1) - B'' \Sigma QR. \end{aligned} \right.$$

De ces dernières, on déduira $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, en remplaçant partout P, Q, R, S, S_1, respectivement, par Q, P, T, S_1, S.

Cela fait, le seul rapprochement des formules (17) et (42) nous montre que, dans le cas actuel,

$$(17') \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Sigma PR = pr, & \Sigma QT = qt, & \Sigma QR = qr, \\ \Sigma QS = qs, & \Sigma PS_1 = ps_1, & \Sigma PT = pt, \\ \Sigma QS_1 = qs_1, & \Sigma PS = ps, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Portant ces valeurs dans $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, pris sous la

---

Plus généralement

$$dS\, d^2S = A \frac{\partial A}{\partial u} du^3 + \left(A \frac{\partial A}{\partial u'} + \frac{\partial B''}{\partial u} \right) du^2 du' + \left(A' \frac{\partial A'}{\partial u} + \frac{\partial B''}{\partial u'} \right) du\, du'^2 + A' \frac{\partial A'}{\partial u'} du'^3,$$

les deux *couples* de termes A_0, A'_0 se détruisant (17) dans les termes du milieu.

forme ($46''$), il vient

$$(49') \quad \left\{ \begin{aligned} &(1+p^2+q^2)(dx\, d^2y - dy\, d^2x) \\ &\quad = -qr\, dx^3 + [pr - q(s+s_1)]\, dx^2\, dy \\ &\qquad - [qt - p(s+s_1)]\, dx\, dy^2 + pt\, dy^3, \end{aligned} \right.$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (49) développée et ordonnée.

A peine est-il besoin de dire que ces diverses formes de l'équation des lignes géodésiques de $\mathfrak{F}''$ (la dernière exceptée, évidemment) peuvent servir à vérifier la parfaite exactitude des équations (25) et ($25'$), relatives, soit au pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$, soit à l'alysséide A_α (n° 9).

16. Terminons par la propriété suivante qui se rattache à celle établie au n° 14 :

Théorème. — *Toute pseudo-surface, représentée par l'équation*

$$dz = p\, dx + q\, dy,$$

et telle que $q = \varphi(p)$, *est une pseudo-surface à* COURBURE TOTALE NULLE.

En effet, si l'on prend la différentielle complète de cette dernière condition, on aura

$$dq = \varphi'(p)\, dp,$$

ou bien (n° 12)

$$s\, dx + t\, dy = \varphi'(p)(r\, dx + s_1\, dy).$$

Et comme ceci est vrai, quel que soit le rapport $\dfrac{dy}{dx}$, on en déduit

$$s = \varphi'(p) r, \qquad t = \varphi'(p) s_1.$$

Éliminant la fonction arbitraire $\varphi'(p)$, il reste

$$(50) \qquad rt - ss_1 = 0,$$

ou, ce qui revient au même (nos **11** et **14**),

$$pq' - qp' = \frac{1}{H^4}(DD' - D''D''_1) = K'' = 0;$$

ce qui démontre la proposition énoncée.