NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACQUANT

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1900). Solution analytique et géométrique de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 416-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__416_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1900). SOLUTION ANALYTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

1° L'équation du cône C est

$$Ax^2 + 2Byz = 0.$$

En désignant par α, β, γ les paramètres directeurs de la droite D et par x_1 l'abscisse de son point de rencontre avec OX, les équations de D sont

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \rho.$$

L'équation d'une surface S tangente au cône C en tous les points d'une courbe plane est de la forme

$$Ax^2 + 2Byz + \lambda(ux + vy + wz + h)^2 = 0.$$

La droite D devant être située sur S, l'équation suivante en ρ doit être identique

$$A(x_1+\alpha\rho)^2+2B\beta\gamma\rho^2+\lambda[ux_1+h+\rho(u\alpha+v\beta+w\gamma)]^2=0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&A\alpha^2+2B\beta\gamma+\lambda(u\alpha+v\beta+w\gamma)^2 = 0,\\
&A\alpha x_1+\lambda(ux_1+h)(u\alpha+v\beta+w\gamma)=0,\\
&Ax_1^2+\lambda(ux_1+h)^2=0.
\end{aligned}$$

Ces trois relations s'écrivent

$$\frac{A\alpha^2+2B\beta\gamma}{A\alpha x_1}=\frac{u\alpha+v\beta+w\gamma}{ux_1+h}=\frac{\alpha}{x_1}, \qquad \lambda=\frac{-Ax_1^2}{(ux_1+h)^2}.$$

Les deux premières simplifiées sont

$$(1) \qquad 2B\beta\gamma=0.$$

$$(2) \qquad x_1(v\beta+w\gamma)-\alpha h=0.$$

La relation (1) signifie que la droite D doit être, soit dans le plan xOy pour $\gamma=0$, soit dans xOz pour $\beta=0$, c'est-à-dire, dans l'un ou l'autre cas, *tangente au cône*.

La relation (2) exprime que la droite D perce le plan $x=0$ sur la droite d'intersection $x=0$, $vy+wz+h=0$ du plan yOz et du plan de la conique de raccordement de S et de C. Dans le cas où la droite D est dans le plan xOy elle rencontrera donc Oy en un point I appartenant à cette conique.

2° Supposons $\gamma=0$, D est dans le plan xOy. Pour trouver le lieu géométrique des centres des surfaces S, on élimine u, v, w, λ, h entre les équations

$$(2)' \qquad v\beta x_1-\alpha h=0 \quad \text{ou} \quad \frac{v}{\alpha}=\frac{h}{\beta x_1},$$

$$\lambda=-\frac{Ax_1^2}{(ux_1+h)^2},$$

$$Ax+\lambda uR=0, \qquad Bz+\lambda vR=0, \qquad By+\lambda wR=0,$$

en posant $R\equiv ux+vy+wz+h$.

Ces équations s'écrivent

$$\frac{Ax}{u} = \frac{Bz}{v} = \frac{By}{w} = -\lambda R = \frac{Ax_1^2(ux+vy+wz+h)}{(ux_1+h)^2}.$$

On en déduit

$$u = v\frac{Ax}{Bz}, \qquad w = \frac{vy}{z},$$

$$ux+vy+wz+h = \frac{vAx^2}{Bz} + 2vy + h,$$

$$ux_1+h = \frac{vAxx_1}{Bz} + h,$$

$$\frac{Bz}{v} = \frac{Ax_1^2(Avx^2+2Bvyz+Bhz)Bz}{(Avxx_1+Bhz)^2}.$$

Remplaçant, dans cette équation homogène en v et h, v par α et h par βx_1, on a, après suppression du facteur $x_1^2 Bz$,

$$(A\alpha x + B\beta z)^2 = A\alpha(A\alpha x^2 + 2B\alpha yz + B\beta x_1 z).$$

Développant et supprimant le facteur Bz, on obtient

$$(\text{P}) \qquad 2A\alpha(\beta x - \alpha y) + B\beta^2 z - A\alpha\beta x_1 = 0$$

pour l'équation du plan P.

La trace du plan P sur le plan xOy, savoir

$$\beta x - \alpha y - \frac{\beta x_1}{2} = 0,$$

est une droite δ parallèle à D et équidistante de D et de O.

De plus, le plan

$$2A\alpha(\beta x - \alpha y) + B\beta^2 z = 0,$$

parallèle à P en passant par O, est tangent au cône C, comme on le vérifie aisément; de sorte que P est parallèle au deuxième plan tangent au cône C parallèle à la droite D (le premier étant xOy); le plan P est ainsi défini géométriquement.

3° Quand la droite D se déplace dans le plan xOy de façon que le plan P passe par un point donné $A(x_0, y_0, z_0)$, on a

$$(3)\qquad 2A\alpha(\beta x_0 - \alpha y_0) + B\beta^2 z_0 - A\alpha\beta x_1 = 0.$$

Les coordonnées de plan P sont

$$u = 2A\alpha\beta, \qquad v = -2A\alpha^2, \qquad w = B\beta^2, \qquad h = -A\alpha\beta x_1.$$

L'élimination de α, β donne

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{u^2}{4A^2} = -\frac{vw}{2AB}$$

ou

$$Bu^2 + 2Avw = 0;$$

c'est l'équation tangentielle du cône C de sommet O. Donc le plan P enveloppe le cône parallèle à C de sommet A. Ce résultat était évident d'après la définition géométrique de P.

La droite D du plan xOy a pour équation

$$\beta x - \alpha y - \beta x_1 = 0$$

ou, en tirant x_1 de la relation (3),

$$A\alpha(\beta x - \alpha y) - 2A\alpha(\beta x_0 - \alpha y_0) - B\beta^2 z_0 = 0.$$

Ordonnant cette équation par rapport à α, β, elle s'écrit

$$A\alpha^2(2y_0 - y) + A\alpha\beta(x - 2x_0) - B\beta^2 z_0 = 0,$$

d'où immédiatement l'équation de l'enveloppe de D

$$A^2(x - 2x_0)^2 + 4ABz_0(2y_0 - y) = 0$$

ou

$$(x - 2x_0)^2 = \frac{4Bz_0}{A}(y - 2y_0).$$

C'est l'équation d'une parabole Q passant par le point O' de coordonnées $(2x_0, 2y_0)$; la tangente en ce point est parallèle à Ox; les diamètres sont parallèles à Oy.

4° Le paramètre p de la parabole Q est donné par la formule

$$p = \pm \frac{2Bz_0}{A} \sin^2\theta,$$

en désignant par θ l'angle des axes Ox, Oy; si p est donné, z_0 est connu et a pour valeur $\frac{pA}{2B\sin^2\theta}$ ou cette valeur changée de signe; le lieu de A se compose donc de deux plans parallèles au plan xOy et équidistants de ce plan.

5° Soient

$$(\pi) \qquad u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0$$

l'équation d'un plan quelconque π et

$$Ax^2 + 2Byz + \lambda(ux + vy + wz + 1)^2 = 0$$

celle des surfaces S qui lui sont tangentes; on a vu (1°)

$$\lambda = \frac{-Ax_1^2}{(ux_1+1)^2}, \qquad \frac{v}{\alpha} = \frac{1}{\beta x_1}.$$

J'ai supposé $h_0 = h = 1$ pour simplifier un peu les calculs.

Les coordonnées (x, y, z) du point de contact M du plan π et d'une surface S satisfont aux équations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{Ax + \lambda u R}{u_0} = \dfrac{Bz + \lambda v R}{v_0} = \dfrac{By + \lambda w R}{w_0} = \lambda R \\ (R \equiv ux + vy + wz + 1;\ u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0). \end{array} \right.$$

On obtient un deuxième lieu de M (le premier étant le plan π) en éliminant u et w entre les équations (4) qu'on peut écrire

$$\frac{Ax}{u - u_0} = \frac{Bz}{v - v_0} = \frac{By}{w - w_0} = -\lambda R.$$

D'où

$$u - u_0 = \frac{Ax}{Bz}(v - v_0),$$

$$w - w_0 = \frac{y}{z}(v - v_0),$$

$$\frac{Bz}{v - v_0} = \frac{Ax_1^2}{(ux_1 + 1)^2}(ux + vy + wz + 1)$$
$$= \frac{Ax_1^2}{(ux_1 + 1)^2}[(u - u_0)x + (v - v_0)y + (w - w_0)z]$$

ou

$$(ux_1 + 1)^2 \frac{Bz}{v - v_0} = Ax_1^2\left(\frac{Ax^2}{Bz} + 2y\right)(v - v_0)$$

ou

$$[(u - u_0)x_1 + u_0x_1 + 1]^2 B^2 z^2 = Ax_1^2(Ax^2 + 2Byz)(v - v_0)^2,$$
$$[Axx_1(v - v_0) + (u_0x_1 + 1)Bz]^2 = Ax_1^2(v - v_0)^2(Ax^2 + 2Byz).$$

En développant et supprimant le facteur Bz, on obtient

$$(\pi_1)\quad \left\{\begin{aligned} &2A(v - v_0)x_1[(u_0x_1 + 1)x - (v - v_0)x_1y] \\ &\qquad\qquad + (u_0x_1 + 1)^2 Bz = 0 \end{aligned}\right.$$

avec

$$v = \frac{\alpha}{\beta x_1}.$$

Le lieu des points de contact $M(x, y, z)$ est donc la droite Δ définie par les équations (π) et (π_1). Le plan π_1 est celui qui passe par Δ et l'origine O. Si l'on pose

$$\frac{u_0x_1 + 1}{(v - v_0)x_1} = \rho,$$

l'équation (π_1) s'écrit

$$(\pi_1)' \qquad Bz\rho^2 + 2Ax\rho - 2Ay = 0.$$

L'enveloppe de ce plan qui passe par O est le cône

$$A^2x^2 + 2ABLyz = 0,$$

c'est-à-dire le cône C. Donc la droite Δ est tangente au cône C. L'équation (π_1) s'écrit encore

$$2A(v - v_0)x_1[x_1(u_0 x + v_0 y) + x - v x_1 y] \\ + (u_0 x_1 + 1)^2 B z = 0.$$

Pour tous les points de Δ, on a

$$u_0 x + v_0 y = -(w_0 z + 1).$$

Comme $v x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, la droite Δ est donc située dans le plan π_2 représenté par l'équation

$$2A(v - v_0)x_1\left[-x_1(w_0 z + 1) + x - \frac{\alpha}{\beta} y\right] \\ + (u_0 x_1 + 1)^2 B z = 0$$

ou

$$(\pi_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2A(v - v_0)x_1\left(x - x_1 - \frac{\alpha}{\beta} y\right) \\ \quad + [B(u_0 x_1 + 1)^2 - 2A x_1^2 (v - v_0) w_0] z = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on pose

$$\mu = \frac{B(u_0 x_1 + 1)^2 - 2A x_1^2 w_0 (v - v_0)}{2A(v - v_0)x_1},$$

l'équation (π_2) s'écrit

$$(\pi_2)' \qquad x - x_1 - \frac{\alpha}{\beta} y + \mu z = 0.$$

Les équations de la droite D étant

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y}{\beta}, \qquad z = 0,$$

on voit que le plan π_2 contient la droite D et, par suite, la droite Δ rencontre la droite D.

Ainsi *les droites* Δ *s'appuient sur* D *et sont tangentes au cône* C.

Quand le plan π se déplace arbitrairement dans l'espace, les droites Δ, représentées par les équations $(\pi_1)'$ et $(\pi_2)'$, forment la congruence des droites s'appuyant sur D en restant tangentes au cône C; les deux paramètres arbitraires sont ρ et μ.

Les équations $(\pi_1)'$ et $(\pi_2)'$ montrent que par un point quelconque ω de l'espace il passe *deux* droites Δ qui sont d'ailleurs les tangentes, issues de ω, à la section du cône C par le plan défini par la droite D et le point ω.

Quand Δ se déplace dans un plan π' passant par D, comme Δ reste tangente au cône C, le plan π qui passe par Δ enveloppe la section du cône par le plan π'. Ce résultat est d'ailleurs facile à établir analytiquement.

Soit

$$(\pi') \qquad x - x_1 - \frac{\alpha}{\beta} y + k z = 0$$

l'équation du plan π' passant par D. D'après l'équation (π_2) on doit avoir, entre la constante k et les coordonnées u_0, v_0, w_0 du plan π, la relation

$$\mathrm{B}(u_0 x_1 + 1)^2 - 2\mathrm{A} x_1^2 w_0 (v - v_0) = k.2\mathrm{A}(v = v_0) x_1$$

ou

$$\mathrm{B}(u_0 x_1 + 1)^2 + 2\mathrm{A}(v_0 - v) x_1 (w_0 x_1 + k) = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant v par $\dfrac{\alpha}{\beta x_1}$,

$$\mathrm{B}\beta(u_0 x_1 + 1)^2 + 2\mathrm{A}(v_0 \beta x_1 - \alpha)(w_0 x_1 + k) = 0.$$

C'est l'équation tangentielle d'une conique située dans le plan des trois points $(x_1, 0, 0)$, $\left(0, -\dfrac{\beta x_1}{\alpha}, 0\right)$, $\left(0, 0, \dfrac{x_1}{k}\right)$ appartenant au plan π', et située aussi sur le cône C, car, en annulant la variable d'homogénéité dans l'équation de cette conique, on obtient :

$$\mathrm{B}\beta u_0^2 x_1^2 + 2\mathrm{A}\beta x_1^2 v_0 w_0 = 0$$

ou

$$\mathrm{B} u_0^2 + 2\mathrm{A} v_0 w_0 = 0,$$

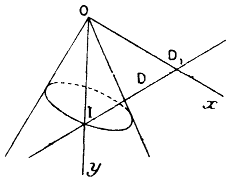
c'est-à-dire l'équation tangentielle du cône C.

Solution géométrique.

Tous les résultats précédents s'obtiennent aisément par la Géométrie.

1° Le plan défini par le point O et la droite D est tangent à la surface S et par suite au cône C, de sommet O, circonscrit à cette surface (*fig.* 1); donc la droite D est

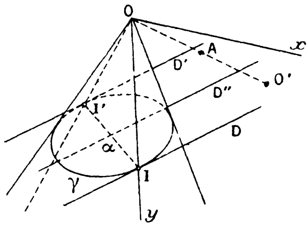
Fig. 1.



dans un plan tangent au cône C; comme elle rencontre Ox en un point D_1, elle sera dans un des plans tangents au cône C passant par la droite Ox, c'est-à-dire dans le plan xOy ou le plan xOz. Supposons la droite D située dans le plan xOy ; elle touche le cône en un certain point de Oy, soit I, qui est aussi le point de contact avec la surface S du point tangent xOy ou (O, D); donc la droite D perce le plan de raccordement de S et C sur Oy.

2° Je considère la génératrice D' de la surface S parallèle à D (*fig.* 2); le plan (D, D') coupe le cône C suivant une conique γ tangente en I à D et tangente aussi à D', car le plan (O, D') est tangent à la surface S et au cône C en un même point I' de D'; or le plan IOI' conjugué de D dans le cône est fixe, quand D est fixe; donc OI' est une droite fixe. Dans le plan (D, D') asymptote de la surface S, la droite D'', équidistante de D et D', contient le centre de la surface S; on peut remarquer aussi que D'' contient le centre α de la conique γ, car ce centre est le milieu de II'. La droite D'' reste donc dans un plan P parallèle au plan $OI'D'$ et équidistant de ce plan et de D. La trace de P sur le plan xOy est une

Fig. 2.



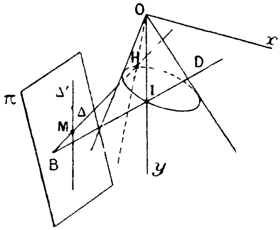
droite δ, parallèle à D et équidistante de O et de D. Ce plan P, lieu des droites D'' qui contiennent les centres des surfaces S, est aussi le lieu de ces centres ; car si l'on considère une surface S_1 se raccordant avec C le long d'une conique γ_1 passant par I et I', son centre décrit D'' quand γ_1 varie.

3° Si le plan P passe par un point donné A, il enveloppera un cône parallèle à C, de sommet A. Le plan passant par D et parallèle au plan (O, D') coupe la droite fixe OA en un point O' qui est fixe, car $AO' = OA$, de sorte que le plan (O', D) enveloppe un cône C' parallèle à C, de sommet O'; la droite D, mobile dans le plan xOy enveloppe donc la section de ce cône C' par le plan xOy; celui-ci étant tangent au cône C est parallèle à un plan tangent au cône C'; donc la section est une parabole Q dont les diamètres sont parallèles à Oy.

4° Le paramètre de cette parabole ne dépend que de la distance du point O' et par suite du point A au plan xOy; donc le paramètre restera constant quand le point A restera à une distance constante de xOy, c'est-à-dire décrira deux plans parallèles à xOy et équidistants de ce plan.

5° Soit B le point de rencontre de la droite D et du plan π (*fig.* 3); le plan π tangent à une surface S la

Fig. 3.



coupe suivant deux génératrices Δ, Δ' dont l'une Δ passe par B. Le plan (O, Δ) est tangent au cône et passe par le point B; donc il est fixe : c'est le deuxième plan tangent au cône C (le premier étant xOy) passant par B. La droite Δ étant l'intersection de deux plans fixes, π et (O, Δ), est fixe. Le point de contact M de S et π étant sur Δ, le lieu de M, quand S varie, est cette droite Δ. On voit que Δ s'appuie sur D et est tangente au cône C.

Quand le plan π se déplace arbitrairement dans l'espace, les droites Δ forment la congruence des droites qui s'appuient sur D et sont tangentes au cône.

Par un point quelconque ω de l'espace, il passe deux droites Δ qui sont les tangentes, issues de ω, à la section du cône C par le plan (ω, D).

Quand Δ se déplace dans un plan π' passant par D, comme Δ reste tangente au cône, le plan π, passant par D, enveloppe la section du cône par le plan π'.