NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VOGT

Sur l'apolarité des formes binaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 337-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__337_0>

[B6a]

SUR L'APOLARITÉ DES FORMES BINAIRES;

PAR M. VOGT,
Professeur à l'Université de Nancy.

1. Je me propose de donner dans cet article quelques aperçus sur certaines parties importantes de la théorie des formes algébriques binaires; ces parties ont été étudiées sous le nom d'*apolarité* par plusieurs mathématiciens, parmi lesquels je citerai Reye, Rosanes, Sturm, Meyer, Picquet ([1]), et elles présentent des applications intéressantes à la théorie des courbes unicursales dans le plan ou dans l'espace. Je reviendrai plus tard sur ces applications; je me contente pour le moment de traiter certaines questions au point de vue de la théorie des formes binaires; les développements qui suivent peuvent être considérés comme une solution du problème proposé au premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1899 (année 1898, p. 485).

2. Considérons deux variables x et y et une substitution linéaire

$$x = ax' + by', \qquad y = cx' + dy',$$

effectuée sur ces variables; nous désignons par δ le déterminant $ad - bc$ de la substitution, et nous le supposons différent de zéro.

([1]) On trouvera des renseignements bibliographiques assez complets sur cette question et sur ses applications, à la fin de l'Ouvrage de Franz Meyer, *Apolarität und rationale Curven* (Tubingen).

Si nous écrivons que l'on a identiquement

$$ux + vy = u'x' + v'y',$$

nous trouvons, en remplaçant x et y par leurs valeurs,

$$au + cv = u', \qquad bu + dv = v',$$

et en résolvant par rapport à u et v ce système d'équations, nous avons

$$\delta v = av' - bu', \qquad -\delta u = cv' - du';$$

nous en concluons que, au facteur δ près, les variables v et $-u$ subissent la même substitution que x et y.

Cela posé, soit $F(x, y)$ une forme homogène des variables x et y, ou, plus généralement, un covariant d'une ou de plusieurs formes données; nous supposons que sa valeur après la substitution, valeur que nous désignons par $F'(x', y')$, soit égale au produit de $F(x, y)$ par la puissance $p^{\text{ième}}$ de δ, c'est-à-dire que l'on ait

$$F'(x', y') = \delta^p F(x, y).$$

En appliquant le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, nous avons identiquement

$$x' \frac{\partial F'}{\partial x'} + y' \frac{\partial F'}{\partial y'} = \delta^p \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right);$$

nous en concluons que les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ s'expriment au moyen de $\frac{\partial F'}{\partial x'}$ et $\frac{\partial F'}{\partial y'}$ de la même manière que u et v au moyen de u' et v', au facteur δ^p près, et, par suite, que les symboles de dérivation $\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial x}$ sont soumis, à une puissance près de δ, à la même substitution que x et y.

Ce résultat s'étend aux symboles de dérivations d'ordres supérieurs; nous avons en effet l'identité symbolique

$$\left(x'\frac{\partial F'}{\partial x'}+y'\frac{\partial F'}{\partial y'}\right)^{(h)}=\delta^p\left(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(h)},$$

dans laquelle nous devons développer les deux membres d'après la formule du binome, puis remplacer tout produit tel que $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{h-i}$ par la dérivée d'ordre h,

$$\frac{\partial^h F}{\partial x^i\,\partial y^{h-i}};$$

en comparant cette identité à l'égalité ordinaire

$$(u'x'+v'y')^h=(ux+vy)^h,$$

nous voyons que les symboles de dérivation $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ et leurs puissances symboliques sont soumis à la même substitution que u et v et leurs puissances, et par suite que $\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial x}$ sont soumis à la même substitution que x et y, à une puissance près de δ.

Si donc $\Phi(x, y)$ est une forme covariante quelconque et si l'on y remplace les variables par les symboles de dérivation $\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial x}$, le résultat de l'opération symbolique $\Phi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$ effectuée sur une forme covariante quelconque $F(x, y)$ est lui-même un invariant ou un covariant.

Supposons que Φ soit la polaire d'ordre h d'une forme $\varphi(x, y)$ par rapport à x_1, y_1, c'est-à-dire que l'on ait

$$\Phi(x.\,y, x_1, y_1)=\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{(h)},$$

la puissance étant symbolique; Φ est un covariant relatif aux substitutions effectuées simultanément sur (x, y)

et (x_1, y_1); si nous remplaçons x_1 et y_1 par les symboles de dérivation $\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial x}$, appliqués à une forme donnée $f(x, y)$, nous aurons un covariant simultané de f et φ, qui s'écrit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^{(h)}.$$

Ce covariant est identique, à un facteur numérique près, à ce que l'on appelle le $h^{\text{ième}}$ composé de f et de φ; si h est égal à l'ordre de φ, ce covariant est le résultat de l'opération $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$ effectuée sur f; si m et p sont les ordres de f et de φ, c'est alors une forme d'ordre $m-p$; elle se réduit à une constante si $m = p$, et n'existe plus si $m < p$. Dans le cas particulier où φ est une puissance $p^{\text{ième}}$ exacte, et est égal à $(xy_1 - yx_1)^p$, le covariant précédent est égal à $\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(p)}$, et représente la $p^{\text{ième}}$ polaire de f par rapport à (x_1, y_1).

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons désormais que les formes f et φ sont écrites de la façon suivante :

$$(1) \qquad f = a_0 x^m + \frac{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} y^2 + \ldots,$$

$$(2) \qquad \varphi = \alpha_0 x^p + \alpha_1 x^{p-1} y + \alpha_2 x^{p-2} y^2 + \ldots,$$

les coefficients du binome étant mis en évidence dans la première et non dans la seconde; nous avons alors

$$\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \alpha_0 \frac{\partial^p f}{\partial y^p} - \alpha_1 \frac{\partial^p f}{\partial y^{p-1}\,\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^p f}{\partial y^{p-2}\,\partial x^2} - \ldots.$$

En remplaçant les dérivées d'ordre p de f par leurs valeurs, nous pouvons mettre en facteur le produit

$$m(m-1)\ldots(m-p+1);$$

nous écrirons

$$\frac{\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{m(m-1)\ldots(m-p+1)} = b_0 x^{m-p} + b_1 x^{m-p-1} y + \ldots + b_{m-p} y^{m-p},$$

les coefficients b ayant pour valeurs

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} b_0 \quad = \alpha_0 a_p \quad - \alpha_1 a_{p-1} + \alpha_2 a_{p-2} - \ldots + (-1)^p \alpha_p a_0, \\ b_1 \quad = \alpha_0 a_{p+1} - \alpha_1 a_p \quad + \alpha_2 a_{p-1} - \ldots + (-1)^p \alpha_p a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{m-p} = \alpha_0 a_m \quad - \alpha_1 a_{m-1} + \alpha_2 a_{m-2} - \ldots + (-1)^p \alpha_p a_{m-p}. \end{array}\right.$$

3. Lorsque tous les coefficients b sont nuls, on dit que la forme φ est *apolaire* par rapport à f; nous nous proposons d'indiquer quelques propriétés des formes apolaires par rapport à une ou plusieurs formes données.

Étant donnée une forme f d'ordre m, pour qu'il existe une forme φ qui lui soit apolaire, il faut et il suffit qu'on puisse trouver des coefficients α_0, α_1, ..., α_p satisfaisant aux équations obtenues en annulant les seconds membres des relations (3); ces équations sont en nombre $m-p+1$ et renferment $p+1$ inconnues d'une manière homogène; elles ont toujours des solutions si $m-p+1$ est inférieur à $p+1$, c'est-à-dire si p est supérieur à $\frac{m}{2}$. Nous allons considérer deux cas suivant que m est impair ou pair.

Premier cas : m impair. — Si les coefficients de f ne sont soumis à aucune restriction, la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à p est $\frac{m+1}{2}$; pour cette valeur, les coefficients de φ sont déterminés, à un facteur constant près, car leur nombre est supérieur d'une unité à celui des équations qui servent à les déterminer. Il existe donc une seule forme φ apolaire à f et d'ordre $\frac{m+1}{2}$; on l'obtient en éliminant les coefficients α entre les équations (2) et (3) où b_0, b_1, ... sont nuls; nous les écrirons de la façon suivante

$$(4)\quad \begin{cases} a_0\alpha_p - a_1\alpha_{p-1} + a_2\alpha_{p-2} - \ldots \pm a_p\alpha_0 = 0, \\ a_1\alpha_p - a_2\alpha_{p-1} + a_3\alpha_{p-2} - \ldots \pm a_{p+1}\alpha_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m-p}\alpha_p - a_{m-p+1}\alpha_{p-1} + a_{m-p+2}\alpha_{p-2} - \ldots \pm a_m\alpha_0 = 0, \end{cases}$$

$$(5)\quad y^p\alpha_p + y^{p-1}x\alpha_{p-1} + y^{p-2}x^2\alpha_{p-2} - \ldots + x^p\alpha_0 = \varphi;$$

on a ainsi, à un coefficient numérique près

$$(6)\quad \varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-p} & a_{m-p+1} & a_{m-p+2} & \ldots & a_m \\ +y^p & -y^{p-1}x & +y^{p-2}x^2 & \ldots & \pm x^p \end{vmatrix},$$

p ayant la valeur $\frac{m+1}{2}$.

Lorsque l'on donne à p une valeur supérieure à $\frac{m+1}{2}$, il existe une infinité de formes d'ordre p apolaires par rapport à f, et elles renferment $2p-m-1$ coefficients arbitraires non homogènes. Pour qu'il existe des formes d'ordre inférieur à $\frac{m+1}{2}$ apolaires à f, il faut que les équations (4) soient compatibles, c'est-à-dire que tous les déterminants d'ordre $p+1$ tirés du tableau des coefficients de ces équations soient nuls.

Par exemple, si $m=3$, il existe dans le cas général une forme d'ordre 2 apolaire à la forme f, et elle est

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ y^2 & -xy & x^2 \end{vmatrix}.$$

c'est la hessienne de la forme cubique donnée; pour qu'il existe une forme linéaire apolaire à f, il faut que tous les déterminants tirés du tableau

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{Vmatrix}$$

soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3},$$

ou bien que la hessienne soit identiquement nulle.

Second cas : m pair. — Lorsque les coefficients de f sont quelconques, la plus petite valeur qu'on puisse attribuer à p est $\frac{m}{2}+1$; la forme φ contient alors un paramètre arbitraire; pour qu'il existe une forme φ d'ordre $\frac{m}{2}$, il est nécessaire que les coefficients de f satisfassent à la condition

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{\frac{m}{2}} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{\frac{m}{2}+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\frac{m}{2}} & a_{\frac{m}{2}+1} & \dots & a_m \end{vmatrix} = 0,$$

et si elle est seule remplie, il existe une forme φ et une seule répondant à la question, à un facteur près; on l'obtient en remplaçant l'une des lignes du déterminant précédent par

$$+y^{\frac{m}{2}}, \quad -y^{\frac{m}{2}-1}x, \quad \dots, \quad \pm x^{\frac{m}{2}}.$$

Par exemple dans le cas de $m=2$, il existe une infinité de formes quadratiques telles que

$$\varphi = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 xy + \alpha_2 y^2,$$

apolaires par rapport à la forme

$$f = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2;$$

il faut et il suffit que α_0, α_1, α_2 satisfassent à la relation

$$\alpha_0 a_2 - \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_0 = 0,$$

c'est-à-dire que les racines des deux formes soient en situation harmonique. Pour qu'il existe une forme φ linéaire apolaire par rapport à f, il faut et il suffit que le discriminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

soit nul ; on a alors

$$\varphi = a_0 x + a_1 y.$$

Dans le cas de $m = 4$, il existe une infinité de formes φ d'ordre égal ou supérieur à 3 apolaires par rapport à f; pour que l'on puisse trouver une forme φ quadratique jouissant de cette propriété, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que l'invariant T de la forme biquadratique soit nul; pour que l'on puisse trouver une forme φ linéaire, il faut que l'on ait

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4}.$$

4. L'intérêt que présente la théorie des formes apolaires par rapport à une forme f d'ordre m réside dans la réduction de cette dernière forme à une somme de puissances $m^{\text{ièmes}}$ de facteurs linéaires; nous allons, à ce sujet, démontrer le théorème suivant :

Si l'on connaît une forme φ, d'ordre p, apolaire *par rapport à une forme donnée f d'ordre m; si φ est décomposable en un produit de p facteurs linéaires distincts, et si l'on a, par exemple,*

$$(8) \qquad \varphi = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)\ldots(xy_p - yx_p),$$

on peut mettre f sous la forme de la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ces p facteurs, affectées de coefficients constants, c'est-à-dire sous la forme

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} f = \mathrm{A}_1(xy_1 - yx_1)^m + \mathrm{A}_2(xy_2 - yx_2)^m + \ldots \\ + \mathrm{A}_p(xy_p - yx_p)^m, \end{aligned} \right.$$

et cela d'une seule manière.

Réciproquement, si f est donnée sous la forme (9) *la forme φ donnée par l'équation* (8) *lui est apolaire.*

Nous commencerons par faire les remarques générales suivantes :

1° Pour qu'une fonction φ, écrite sous la forme (8), soit apolaire par rapport à une fonction donnée f, il faut et il suffit que l'expression symbolique

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x} + y_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(x_p \frac{\partial}{\partial x} + y_p \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

appliquée à f donne un résultat nul ; ce résultat est celui que l'on obtient en appliquant à f la formation polaire successivement par rapport à

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_p, y_p).$$

2° Pour qu'une forme φ soit apolaire par rapport à une puissance $m^{\text{ième}}$ telle que $(xy_i - yx_i)^m$, il faut et il suffit que cette forme φ soit divisible par le facteur

$$xy_i - yx_i;$$

en effet, les polaires successives de cette puissance sont, à un facteur constant près, des puissances de même nature; pour que le résultat des formations polaires successives soit nul, il faut et il suffit que l'un des éléments par rapport auxquels on prend la polaire soit identique à (x_i, y_i).

3° Si une forme φ est apolaire par rapport à plusieurs formes f_1, f_2, ..., f_p, elle est apolaire par rapport à toute combinaison linéaire de ces formes, telle que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_p f_p;$$

les équations (4) sont, en effet, satisfaites pour cette combinaison si elles le sont pour chacune des formes f.

Il résulte de ces remarques que la forme (8) est toujours apolaire par rapport à la forme (9) quels que soient les coefficients A_1, A_2, ..., A_p; par suite, la réciproque du théorème énoncé est vérifiée. Pour démontrer la proposition directe, il suffit de faire voir que si la forme (8) d'ordre p est apolaire par rapport à une forme donnée f d'ordre m telle que (1), on peut toujours déterminer les coefficients A_1, A_2, ..., A_p entrant dans l'expression (9) de manière à identifier cette expression avec la forme donnée; nous allons voir que cela est possible et d'une seule manière.

Les relations d'identification sont

$$(10)\quad \begin{cases} a_0 = A_1 y_1^m + A_2 y_2^m + \ldots + A_p y_p^m, \\ -a_1 = A_1 y_1^{m-1} x_1 + A_2 y_2^{m-1} x_2 + \ldots + A_p y_p^{m-1} x_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm a_m = A_1 x_1^m + A_2 x_2^m + \ldots + A_p x_p^m; \end{cases}$$

or, les relations (4) sont satisfaites identiquement par hypothèse; elles sont en nombre $m - p + 1$, et peuvent remplacer $m - p + 1$ des équations précédentes, par exemple les $m - p + 1$ dernières; il suffit alors de satisfaire aux p premières. Ces p équations déterminent les inconnues A_1, A_2, ..., A_p d'une manière unique; en effet, le déterminant des coefficients des inconnues est, à un facteur près différent de zéro, le déterminant de Vandermonde des p systèmes (x_i, y_i) et il n'est pas nul puisque ces systèmes sont distincts; il existe donc un seul système de valeurs de $A_1, A_2, \ldots, A_p$, et la proposition est démontrée. On obtiendrait l'expression de f en éliminant $A_1, A_2, \ldots, A_p$ entre l'équation (9) et les p premières équations (10).

5. Comme conséquence des résultats précédents, nous pouvons énoncer ce théorème :

Une forme f, dont l'ordre m est impair, et dont les coefficients ne sont soumis à aucune restriction, se ramène toujours d'une manière et d'une seule à la somme de $\frac{m+1}{2}$ puissances $m^{\text{ièmes}}$ de formes linéaires, affectées de coefficients constants; ces formes sont les diviseurs du déterminant (6), où p a la valeur $\frac{m+1}{2}$.

Par exemple, toute forme cubique se ramène à la somme de deux cubes de formes linéaires, et ces formes sont les diviseurs de la hessienne; on retrouve ainsi un résultat bien connu.

Toute forme f d'ordre quelconque se ramène d'une infinité de manières à la somme d'un nombre p de puissances $m^{\text{ièmes}}$ de forme linéaire, p étant supérieur à $\frac{m+1}{2}$. Pour qu'elle se ramène à la somme de p puissances $m^{\text{ièmes}}$, p étant inférieur à $\frac{m+1}{2}$, il faut et il suffit que les équations (4) soient compatibles. En particulier, si m est pair, f se ramène à la somme de $\frac{m}{2}$ puissances $m^{\text{ièmes}}$ si le déterminant (7) est nul.

Par exemple, une forme quadratique est réductible d'une infinité de manières à la somme de deux carrés, et une forme biquadratique à celle de trois carrés; pour que, dans ce dernier cas, le nombre des carrés se réduise à deux, il faut et il suffit que l'invariant T soit nul.

6. Nous allons supposer plus généralement que la forme φ d'ordre p apolaire par rapport à f ait des racines multiples, et soit égale à

$$(11)\quad \varphi = (xy_1 - yx_1)^{p_1}(xy_2 - yx_2)^{p_2}\ldots(xy_q - yx_q)^{p_q},$$

$p_1 + p_2 + \ldots + p_q$ étant égal à p; nous allons montrer que f est réductible à la forme

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} f = (xy_1 - yx_1)^{m-p_1+1} f_1 + (xy_2 - yx_2)^{m-p_2+1} f_2 + \ldots \\ + (xy_q - yx_q)^{m-p_q+1} f_q, \end{aligned} \right.$$

f_1, f_2, ..., f_q étant des formes particulières d'ordres respectifs $p_1 - 1$, $p_2 - 1$, ..., $p_q - 1$, et réciproquement.

Nous allons d'abord voir que φ est apolaire par rapport à chacune des parties de la somme dont se compose f; cela résulte de ce fait qu'en appliquant l'opération symbolique

$$\left(x_i \frac{\partial}{\partial x} + y_i \frac{\partial}{\partial y}\right)^{p_i} \varphi_i\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

où φ_i est d'ordre $p - p_i$, à la forme

$$(xy_i - yx_i)^{m-p_i+1} f_i(x, y),$$

où f_i est d'ordre $p_i - 1$, on obtient une quantité identiquement nulle. Si l'on commence, en effet, par effectuer l'opération $\varphi_i\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$, le résultat est de la forme

$$(xy_i - yx_i)^{m-p+1}\, \psi_i(x, y),$$

où ψ est une forme d'ordre $p_i - 1$; en prenant ensuite p_i fois successivement la polaire de cette quantité par rapport à (x_i, y_i), on constate que le résultat est identiquement nul, comme nous l'avons annoncé.

La forme φ étant, d'après ce qui précède, apolaire par rapport à chacune des parties de f, est apolaire par rapport à f elle-même; il nous reste à montrer inversement que si φ est apolaire par rapport à une forme f donnée telle que (1), celle-ci peut être mise sous la forme (12); nous allons voir que cela est toujours possible, et d'une seule manière.

Les formes $f_1, f_2, \ldots, f_q$ entrant dans l'équation (12) contiennent $p_1 + p_2 + \ldots + p_q$, c'est-à-dire p coefficients indéterminés; ces coefficients doivent satisfaire aux $m+1$ relations d'identification de (1) et de (12); mais $m-p+1$ de ces relations peuvent être remplacées par les équations (4) qui sont identiquement satisfaites par hypothèse; il suffit donc de considérer p équations d'identification, par exemple celles qui donnent les valeurs de a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{p-1}, et de montrer qu'elles donnent un système unique de valeurs des p coefficients inconnus.

Pour ne pas compliquer l'écriture nous nous placerons dans un cas particulier, ce qui ne change rien aux raisonnements; nous supposerons que l'on ait $q = 3$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$, d'où $p = 6$; nous ferons de plus les quantités y égales à l'unité, et nous supposerons f_1, f_2 et f_3 développés suivant les puissances respectives de $x - x_1$, $x - x_2$ et $x - x_3$, sous la forme

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1(x - x_1)^2 + A_2(x - x_1) + A_3, \\ f_2 &= A_4(x - x_1) + A_5, \\ f_3 &= A_6; \end{aligned}$$

nous écrirons alors l'identité suivante,

$$\begin{aligned} &a_0 x^m + C_m^1 a_1 x^{m-1} + C_m^2 a_2 x^{m-2} + \ldots \\ &\quad = A_1(x - x_1)^m + A_2(x - x_1)^{m-1} + A_3(x - x_1)^{m-2} \\ &\qquad + A_4(x - x_2)^m + A_5(x - x_2)^{m-1} + A_6(x - x_3)^m, \end{aligned}$$

et nous égalerons les coefficients des six plus hautes puissances de x dans les deux membres.

Le déterminant des coefficients de $A_1, A_2, \ldots, A_6$ dans les six équations obtenues est, au signe près,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ C_m^1 x_1 & 1 & 0 & C_m^1 x_2 & 1 & C_m^1 x_3 \\ C_m^2 x_1^2 & C_{m-1}^1 x_1 & 1 & C_m^2 x_2^2 & C_{m-1}^1 x_2 & C_m^2 x_3^2 \\ C_m^3 x_1^3 & C_{m-1}^2 x_1^2 & C_{m-2}^1 x_1 & C_m^3 x_2^3 & C_{m-1}^2 x_2^2 & C_m^3 x_3^3 \\ C_m^4 x_1^4 & C_{m-1}^3 x_1^3 & C_{m-2}^2 x_1^2 & C_m^4 x_2^4 & C_{m-1}^3 x_2^3 & C_m^4 x_3^4 \\ C_m^5 x_1^5 & C_{m-1}^4 x_1^4 & C_{m-2}^3 x_1^3 & C_m^5 x_2^5 & C_{m-1}^4 x_2^4 & C_m^5 x_3^5 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est la généralisation de celui de Vandermonde; nous allons voir qu'il ne diffère que par un coefficient numérique du produit

$$(x_2 - x_1)^6 (x_3 - x_1)^3 (x_3 - x_2)^2.$$

Considéré comme fonction de x_1, il s'annule pour $x_1 = x_2$, je dis qu'il en est de même de ses dérivées successives jusqu'à la cinquième; formons sa dérivée par rapport à x_1; elle est la somme des déterminants obtenus en remplaçant les éléments d'une des colonnes par leurs dérivées par rapport à cette lettre; les dérivées des éléments de la première colonne sont, comme on le voit immédiatement, égales aux produits par C_m^1 des éléments correspondants de la seconde, et le déterminant qui en résulte est nul; on voit de même que la dérivation des éléments de la seconde colonne donne encore un résultat identiquement nul, il suffit donc de remplacer les éléments de la troisième colonne par leurs dérivées; on constate bien que le résultat ainsi obtenu s'annule encore pour $x_1 = x_2$. On verrait de la même façon que les dérivées suivantes du déterminant par rapport à x_1 jusqu'à la cinquième jouissent de la même propriété, et que ce déterminant est divisible par $(x_2 - x_1)^6$.

Pour une raison analogue, il contient en facteur $(x_3 - x_1)^3$ et $(x_3 - x_2)^2$; en examinant les degrés par rapport à l'ensemble des lettres et les coefficients du terme fourni par la diagonale principale, on voit que le déterminant a pour valeur

$$C_m^3 C_{m-1}^3 C_m^5 (x_2 - x_1)^6 (x_3 - x_1)^3 (x_3 - x_2)^2;$$

par conséquent il n'est pas nul et il existe un seul système de valeurs de $A_1, A_2, \ldots, A_6$, ce que nous voulions établir.

Comme exercice de calcul, on peut vérifier qu'un déterminant analogue au précédent, renfermant x_1 dans les p_1 premières colonnes, x_2 dans les p_2 suivantes, et ainsi de suite, ne diffère que par un facteur numérique du produit

$$(x_2 - x_1)^{p_2 p_1} (x_3 - x_1)^{p_3 p_1} \ldots (x_i - x_k)^{p_i p_k} \ldots.$$

Comme application de ce qui précède, on voit que si une forme cubique f a une hessienne φ égale au carré de $xy_1 - yx_1$, f est réductible d'une manière et d'une seule à la forme

$$f = (xy_1 - yx_1)^2 (A_1 x + A_2 y).$$

7. Considérons le cas de $p = m$; les relations (4), qui expriment que φ est apolaire par rapport à f, se réduisent à une seule, qui est

$$(13) \qquad a_0 \alpha_m - a_1 \alpha_{m-1} + a_2 \alpha_{m-2} - \ldots \pm a_m \alpha_0 = 0.$$

En introduisant les coefficients du binome dans les termes de φ, c'est-à-dire en écrivant, par exemple,

$$\varphi = b_0 x^m + \frac{m}{1} b_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} b_2 x^{m-2} y^2 + \ldots,$$

la condition précédente s'écrit

$$a_0 b_m - \frac{m}{1} a_1 b_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 b_{m-2} - \ldots \pm a_m b_0 = 0;$$

comme elle est symétrique par rapport aux coefficients a et b, on en conclut que f est inversement apolaire par rapport à φ.

Si les deux formes f et φ sont identiques, la condition précédente se réduit à

$$a_0 a_m - \frac{m}{1} a_1 a_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 a_{m-2} - \ldots \pm a_m a_0 = 0;$$

le premier membre est un invariant, car il est le résultat du calcul symbolique $f\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$ appliqué à la forme f elle-même.

Dans le cas de m impair, cet invariant est identiquement nul, et la forme f est toujours apolaire par rapport à elle-même.

Dans le cas de m pair l'invariant renferme deux fois les mêmes termes, à égale distance des extrêmes, sauf le terme du milieu, qui intervient une seule fois; par exemple, dans le cas de la forme quadratique il est égal au double du discriminant et dans le cas de la forme biquadratique, il a pour valeur

$$2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) = 2\mathrm{S};$$

en l'annulant, on a la condition nécessaire et suffisante pour que f soit apolaire par rapport à elle-même.

8. Nous allons maintenant considérer un système de formes f d'ordre m; nous nous placerons d'abord dans le cas où le nombre de ces formes est égal à m, et nous

les écrirons

$$(14)\quad \begin{cases} f_1 = a_0 x^m + \dfrac{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \ldots, \\ f_2 = b_0 x^m + \dfrac{m}{1} b_1 x^{m-1} y + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m = l_0 x^m + \dfrac{m}{1} l_1 x^{m-1} y + \ldots : \end{cases}$$

nous supposons qu'elles sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun système de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ non tous nuls tels que l'on ait identiquement

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0;$$

pour qu'une telle identité ne soit pas possible, il faut et il suffit que les déterminants d'ordre m tirés du tableau des coefficients $a, b, \ldots, l$, ne soient pas tous nuls; c'est ce que nous admettrons désormais.

Il existe une forme φ et une seule apolaire par rapport à chacune des formes f; les coefficients de cette forme doivent, en effet, satisfaire à la relation (13) et aux relations analogues relatives aux coefficients b, $c, \ldots, l$; on obtient ainsi m équations homogènes à $m+1$ inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, et elles déterminent à un facteur numérique près un système unique de valeurs de ces inconnues, d'après l'hypothèse faite que les formes sont indépendantes.

L'élimination des coefficients α entre l'équation (2) qui définit φ et les relations telles que (13) fournit, comme expression de φ, la suivante

$$(15)\quad \varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_0 & l_1 & l_2 & \ldots & l_m \\ y^m & -y^{m-1}x & y^{m-2}x^2 & \ldots & \pm x^m \end{vmatrix};$$

nous allons voir qu'elle ne diffère que par un facteur numérique du déterminant des dérivées d'ordre $m-1$ des formes f:

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^{m-1} f_1}{\partial x^{m-1}} & \dfrac{\partial^{m-1} f_1}{\partial x^{m-2}\,\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial^{m-1} f_1}{\partial y^{m}} \\ \dfrac{\partial^{m-1} f_2}{\partial x^{m-1}} & \dfrac{\partial^{m-1} f_2}{\partial x^{m-2}\,\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial^{m-1} f_2}{\partial y^{m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^{m-1} f_m}{\partial x^{m-1}} & \dfrac{\partial^{m-1} f_m}{\partial x^{m-2}\,\partial y} & \cdots & \dfrac{\partial^{m-1} f_m}{\partial y^{m}} \end{vmatrix};$$

si nous multiplions, en effet, les éléments de la première colonne du déterminant (15) par x, et si nous leur ajoutons ceux de la suivante multipliés par y, puis si nous répétons le même calcul pour la deuxième colonne, la troisième, etc., nous obtenons un déterminant qui se réduit au signe près à

$$\begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & a_1 x + a_2 y & \cdots & a_{m-1} x + a_m y \\ b_0 x + b_1 y & b_1 x + b_2 y & \cdots & b_{m-1} x + b_m y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_0 x + l_1 y & l_1 x + l_2 y & \cdots & l_{m-1} x + l_m y \end{vmatrix}$$

et ce dernier est identique à (16) à un facteur numérique près.

Dans le cas général, φ a ses racines distinctes; supposons que l'on ait

$$\varphi = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)\ldots(xy_m - yx_m);$$

nous savons que chacune des formes f par rapport auxquelles φ est apolaire peut être mise sous la forme d'une somme de m puissances $m^{\text{ièmes}}$, et cela d'une seule manière; nous pourrons de cette façon écrire

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1(xy_1 - yx_1)^m + A_2(xy_2 - yx_2)^m + \ldots + A_m(xy_m - yx_m)^m, \\ f_2 &= B_1(xy_1 - yx_1)^m + B_2(xy_2 - yx_2)^m + \ldots + B_m(xy_m - yx_m)^m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= L_1(xy_1 - yx_1)^m + L_2(xy_2 - yx_2)^m + \ldots + L_m(xy_m - yx_m)^m. \end{aligned}$$

les coefficients A, B, . . . , L étant déterminés d'une manière unique; nous énoncerons ce résultat de la façon suivante :

m formes binaires d'ordre m telles que (14) *peuvent en général être ramenées simultanément à la somme de m puissances $m^{\text{ièmes}}$ des mêmes formes linéaires; ces dernières sont les diviseurs du premier degré des déterminants* (15) *ou* (16).

Dans le cas particulier où φ a des racines multiples et se met, par exemple, sous la forme (11), les formes f sont réductibles simultanément à la forme (12).

Comme exemple, deux formes quadratiques f_1 et f_2 sont, en général, réductibles simultanément à des sommes de deux carrés des mêmes formes linéaires; ces formes sont les diviseurs de la jacobienne de deux formes données

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix};$$

si cette jacobienne est le carré parfait d'une forme linéaire f_1 et f_2 ont cette forme comme diviseur commun.

9. Nous considérons maintenant le cas où l'on donne q formes f d'ordre m, q étant inférieur à m; nous allons chercher les formes φ d'ordre m qui sont apolaires par rapport à ces formes f. Pour simplifier l'écriture des coefficients, nous supposerons cette fois que les coefficients du binome sont mis en évidence dans φ, et nous poserons

$$\varphi = \alpha_0 x^m + C_m^1 \alpha_1 x^{m-1} y + C_m^2 \alpha_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + \alpha_m y^m;$$

nous écrirons de même, comme dans les formules (14),

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0 x^m + C_m^1 a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m, \\ f_2 &= b_0 x^m + C_m^1 b_1 x^{m-1} y + \ldots + b_m y^m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_q &= h_0 x^m + C_m^1 h_1 x^{m-1} y + \ldots + h_m y^m. \end{aligned}$$

Pour que φ soit apolaire par rapport à ces formes f, il faut que les q conditions suivantes soient remplies

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_m a_0 - C_m^1 \alpha_{m-1} a_1 + C_m^2 \alpha_{m-2} a_2 - \ldots \pm \alpha_0 a_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_m h_0 - C_m^1 \alpha_{m-1} h_1 + C_m^2 \alpha_{m-2} h_2 - \ldots \pm \alpha_0 h_m = 0; \end{array} \right.$$

comme les formes f sont supposées linéairement indépendantes, les déterminants d'ordre q tirés du tableau de leurs coefficients ne sont pas tous nuls; si l'on suppose, par exemple, que le déterminant

$$d = \begin{vmatrix} a_0 & C_m^1 a_1 & \ldots & C_m^{q-1} a_{q-1} \\ b_0 & C_m^1 b_1 & \ldots & C_m^{q-1} b_{q-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_0 & C_m^1 h_1 & \ldots & C_m^{q-1} h_{q-1} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, les équations (17) fournissent les valeurs de q des coefficients α, celles de $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_{m-q+1}$ au moyen des $m-q+1$ autres; il en résulte que la forme φ répondant à la question a ses coefficients fonctions linéaires et homogènes de $m-q+1$ paramètres arbitraires; autrement dit, il existe $m-q+1$ formes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-q+1}$ apolaires par rapport aux formes f, et toutes les formes φ sont données par la formule générale

$$(18)\qquad \varphi = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \ldots + \mu_{m-q+1} \varphi_{m-q+1},$$

où les coefficients μ sont arbitraires.

Dans le cas que nous avons considéré, où d n'est pas nul, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-q+1}$ peuvent être représentés par des déterminants d'ordre $q+1$ tirés du Tableau

$$(19)\qquad \left\| \begin{array}{ccccc} a_0 & C_m^1 a_1 & C_m^2 a_2 & \dots & a_m \\ b_0 & C_m^1 b_1 & C_m^2 b_2 & \dots & b_m \\ \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ h_0 & C_m^1 h_1 & C_m^2 h_2 & \dots & h_m \\ y^m & -C_m^1 y^{m-1}x & C_m^2 y^{m-2}x^2 & \dots & \pm x^m \end{array} \right\|,$$

et formés en adjoignant aux q premières colonnes chacune des suivantes respectivement. Ces fonctions sont linéairement indépendantes, car elles contiennent chacune un terme différent dans la suite des termes

$$x^q y^{m-q},\quad x^{q+1}y^{m-q-1},\quad \dots,\quad x^m.$$

Il y a réciprocité entre les formes f et φ, d'après les formules (17); l'ensemble des formes f apolaires par rapport à toutes les formes (18) est représenté par

$$(20)\qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_q f_q,$$

où les λ sont des paramètres arbitraires.

10. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Le déterminant fonctionnel constitué par les dérivées partielles d'ordre $q-1$ des formes f, et le déterminant analogue constitué par les dérivées partielles d'ordre $m-q$ des formes φ ne diffèrent l'un de l'autre que par un facteur constant.

Nous commencerons par mettre le premier de ces déterminants sous une autre forme, en montrant que les deux déterminants

$$(21)\qquad \left| \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial^{q-1} f_1}{\partial x^{q-1}} & \dfrac{\partial^{q-1} f_1}{\partial x^{q-2}\,\partial y} & \dots & \dfrac{\partial^{q-1} f_1}{\partial y^{q-1}} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial^{q-1} f_q}{\partial x^{q-1}} & \dfrac{\partial^{q-1} f_q}{\partial x^{q-2}\,\partial y} & \dots & \dfrac{\partial^{q-1} f_q}{\partial y^{q-1}} \end{array} \right|$$

et

$$
(22)\quad \begin{vmatrix}
a_0 & C_m^1 a_1 & C_m^2 a_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & a_m \\
\cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\
h_0 & C_m^1 h_1 & C_m^2 h_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & h_m \\
y^q & -C_q^1 y^{q-1} x & C_q^2 y^{q-2} x^2 & \cdot\cdot & \pm x^q & 0 & \cdots & 0 \\
0 & y^q & -C_q^1 y^{q-1} x & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \pm x^q & \cdots & 0 \\
\cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdot\cdot & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdot\cdot \\
0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & y^q & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \pm x^q
\end{vmatrix}
$$

ne diffèrent que par un facteur constant; c'est la généralisation de la propriété démontrée dans le cas des déterminants (15) et (16).

Nous multiplierons pour cela le déterminant (22) par le suivant

$$
\begin{vmatrix}
A_m^{q-1} x^{m-q+1} & 0 & 0 & \cdots \\
A_{m-1}^{q-1} x^{m-q} y & A_{m-1}^{q-2} A_1^1 x^{m-q+1} & 0 & \cdots \\
A_{m-2}^{q-1} x^{m-q-1} y^2 & A_{m-2}^{q-2} A_2^1 x^{m-q} y & A_{m-2}^{q-3} A_2^2 x^{m-q+1} & \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
A_{q-1}^{q-1} y^{m-q+1} & A_{q-1}^{q-2} A_{m-q+1}^1 x y^{m-q} & A_{q-1}^{q-3} A_{m-q+1}^2 x^2 y^{m-q-1} & \cdots \\
0 & A_{q-2}^{q-2} A_{m-q+2}^1 y^{m-q+1} & A_{q-2}^{q-3} A_{m-q+2}^2 x y^{m-q} & \cdots \\
0 & 0 & A_{q-3}^{q-3} A_{m-q+3}^2 y^{m-q+1} & \cdots \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots
\end{vmatrix}
$$

les q premières colonnes de ce dernier déterminant sont constituées par des éléments dont la loi de formation est mise en évidence, A_r^s désignant le nombre des arrangements de r objets s à s; les colonnes suivantes contiennent seulement l'unité sur la diagonale principale, et leurs autres éléments sont nuls; ce déterminant est égal au produit de $x^{q(m-q+1)}$ par un facteur constant.

En effectuant la multiplication, on obtient d'abord, dans les q premières lignes et les q premières colonnes du produit, les éléments du déterminant (21); on constate ensuite que les lignes suivantes ont leurs q premiers éléments égaux à zéro; on vérifie, en effet, que l'élément situé dans la $q+r^{\text{ième}}$ ligne et la $s^{\text{ième}}$ colonne ($s \leqq q$) contient $x^{m-q-r+s+1} y^{q+r-s}$ en facteur, et le coefficient de ce produit est égal à la valeur que prend l'expression

$$\frac{\partial^{q-1}}{\partial u^{q-s}\,\partial v^{s-1}} u^{m-q-r+1} v^{r-1} (u-v)^q,$$

lorsqu'on y fait $u=v$; cette valeur est toujours nulle.

Le produit effectué se trouve, de cette façon, être égal au déterminant (21) multiplié par un déterminant d'ordre $m-q+1$; ce dernier renferme x^q dans tous les éléments de la diagonale principale et se réduit à $\pm x^{q(m-q+1)}$; comme le déterminant par lequel on a multiplié (22) a cette même valeur, à un coefficient numérique près, l'identité des expressions (21) et (22) se trouve bien démontrée à un facteur constant près.

M. Andoyer, dans ses *Leçons sur la théorie des formes,* a mentionné la transformation précédente des déterminants (21) et (22) l'un dans l'autre, et a indiqué que l'évanouissement identique de l'une ou l'autre de ces expressions est la condition nécessaire et suffisante pour que les q formes f ne soient pas linéairement indépendantes.

Ceci étant posé, nous avons vu que les formes indépendantes φ, en nombre $m-q+1$ sont représentées par des déterminants d'ordre $q+1$ tirés du Tableau (19), ces déterminants ayant en commun les q premières colonnes de ce Tableau, et différant par la $q+1^{\text{ième}}$. Les dérivées partielles d'ordre $m-q$ de ces formes se déduisent de la même manière, à des facteurs numériques près, de Tableaux analogues à (19); il suffit d'y remplacer la dernière ligne successivement par les dernières lignes du déterminant (22). Ces dérivées sont donc à des facteurs constants près égales à des déterminants d'ordre $q+1$, mineurs de (22), et obtenus en bordant le mineur désigné précédemment par d au moyen des éléments de la $q+r^{\text{ième}}$ ligne et de la $q+s^{\text{ième}}$ colonne.

D'après un théorème démontré dans un précédent article [*Théorème relatif aux mineurs d'un déterminant* (*Nouvelles Annales*, mai 1901, p. 211)], le déterminant Δ de ces mineurs a pour valeur $\mathrm{D}d^{m-q-1}$, D représentant le déterminant (22); l'identité du déterminant (21) et de celui qui est formé par les dérivées d'ordre $m-q$ des formes φ, déterminant que nous représenterons par

$$\left|\frac{\partial^{m-q}\varphi_r}{\partial x^{m-q-s}\,\partial y^s}\right|, \tag{23}$$

se trouve ainsi démontrée, à un facteur constant près.

11. Nous allons donner de ce théorème une démonstration plus courte que la précédente, en supposant toutefois que les coefficients ne sont soumis à aucune restriction, et nous indiquerons en même temps la signification du déterminant (21) et de son analogue (23) relatif aux formes φ. Cherchons parmi le système des formes

$$f=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_q f_q,$$

celles qui ont une racine multiple d'ordre q; si (x_1, y_1) est cette racine, elle annule les dérivées partielles d'ordre $q-1$ de f, et satisfait aux équations

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda_1\frac{\partial^{q-1}f_1}{\partial x^{q-1-s}\,\partial y^s}+\lambda_2\frac{\partial^{q-1}f_2}{\partial x^{q-1-s}\,\partial y^s}+\ldots\\ &\qquad+\lambda_q\frac{\partial^{q-1}f_q}{\partial x^{q-1-s}\,\partial y^s}=0,\end{aligned}\right. \tag{24}$$

pour les valeurs successives de s. L'élimination des quantités λ entre ces équations fournit précisément l'équation obtenue en annulant le déterminant (21); on voit donc que les racines multiples d'ordre q des formes f annulent ce déterminant. Réciproquement, si (x_1, y_1) rend nul le covariant (21), les équations (24) ont pour $x = x_1$ et $y = y_1$ au moins une solution en λ_1, λ_2, ..., λ_q, et il existe une ou plusieurs formes f ayant (x_1, y_1) comme racine multiple d'ordre au moins égal à q.

Cela posé, toutes les formes représentées par

$$\varphi = \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 + \ldots + \mu_{m-q+1}\varphi_{m-q+1}$$

sont apolaires par rapport à toutes les formes f, et ce sont les seules; or nous avons démontré (n° 6) que si une forme f contient $(xy_1 - yx_1)^q$ en facteurs, toute forme φ contenant $(xy_1 - yx_1)^{m-q+1}$ en facteur est apolaire par rapport à la première f; par suite on doit trouver parmi les formes φ renfermées dans la formule précédente une forme au moins ayant (x_1, y_1) comme racine multiple d'ordre $m - q + 1$.

Comme les racines multiples d'ordre $m - q + 1$ que peuvent présenter les formes φ annulent le déterminant (23), d'après un raisonnement analogue au précédent on voit que toutes les racines de (21) doivent annuler (23); la réciproque est évidente d'après la réciprocité qui existe entre les systèmes f et φ. Si les racines (x_1, y_1), en nombre $q(m - q + 1)$, sont toutes simples, l'identité des déterminants (21) et (23) à un facteur près se trouve par cela même démontrée. Nous n'insisterons pas sur le cas où deux ou plusieurs racines (x_1, y_1) sont égales, et nous admettrons que la proposition est générale; le raisonnement du numéro précédent s'applique du reste à tous les cas.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Étant données q formes binaires d'ordre m, linéai-

rement indépendantes : $f_1, f_2, \ldots, f_q$ $(q \leqq m)$, *parmi les combinaisons linéaires de ces formes, telles que*

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_q f_q,$$

il existe en général $q(m-q+1)$ *formes qui possèdent une racine multiple d'ordre* q; *les systèmes de valeurs* (x, y) *qui sont les racines d'ordre* q *de ces formes s'obtiennent en annulant le déterminant fonctionnel* (21) *et sont les racines de l'équation ainsi formée.*

Il existe $m-q+1$ *formes linéairement indépendantes d'ordre* m, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-q+1}$, *apolaires par rapport aux formes* f; *parmi les combinaisons linéaires de ces formes, telles que*

$$\varphi = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \ldots + \mu_{m-q+1} \varphi_{m-q+1},$$

il y a le même nombre $q(m-q+1)$ *de formes possédant une racine multiple d'ordre* $m-q+1$; *ces racines multiples s'obtiennent en annulant le déterminant* (23) *et sont les mêmes que les précédentes.*

12. Nous allons appliquer les considérations précédentes à la réduction simultanée des formes f et φ à une forme canonique; nous nous limiterons au cas général, où les coefficients des formes f ne sont soumis à aucune restriction particulière.

Désignons par q' le nombre $m-q+1$, par ν le degré $qq' = q(m-q+1)$ des déterminants (21) ou (23) et par $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_\nu, y_\nu)$ leurs racines, qui sont les mêmes comme nous l'avons vu; à l'une quelconque d'entre elles, telle que (x_i, y_i), correspondent des systèmes de nombres λ_r^i et μ_s^i tels que les formes $\Sigma\lambda_r^i f_r$ et $\Sigma\mu_s^i \varphi_s$ aient comme racine (x_i, y_i), la première avec l'ordre q, la deuxième avec l'ordre $q' = m-q+1$ de multiplicité; nous aurons donc des identités de la forme

$$\lambda_1^i f_1 + \lambda_2^i f_2 + \ldots + \lambda_q^i f_q = (xy_i - yx_i)^q g_i,$$
$$\mu_1^i \varphi_1 + \mu_2^i \varphi_2 + \ldots + \mu_{q'}^i \varphi_{q'} = (xy_i - yx_i)^{q'} \psi_i,$$

i variant de 1 à ν, g_i et ψ_i étant des formes d'ordres respectifs $m - q$ et $m - q' = q - 1$.

Nous déduirons de là, pour les formes f et φ, des expressions telles que

$$\begin{aligned} f_r = (xy_1 - yx_1)^q h_{r1} + (xy_2 - yx_2)^q h_{r2} + \ldots \\ + (xy_q - yx_q)^q h_{rq}, \\ \varphi_s = (xy_1 - yx_1)^{q'} \chi_{s1} + (xy_2 - yx_2)^{q'} \chi_{s2} + \ldots \\ + (xy_{q'} - yx_{q'})^{q'} \chi_{sq'}; \end{aligned}$$

les quantités h et χ étant des formes d'ordres respectivement égaux à $m - q$ et $m - q'$; dans chaque groupe de formes, nous pourrons remplacer les racines qui interviennent dans les parenthèses par d'autres racines des déterminants (21) ou (23); nous aurons ainsi, lorsque q est différent de 1 ou de m, plusieurs réductions possibles analogues à la précédente.

Par exemple, étant données deux formes cubiques f_1 et f_2, on a $m = 3$, $q = 2$, $q' = 2$; parmi les combinaisons linéaires telles que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ on peut trouver quatre formes ayant une racine double, ainsi que parmi les combinaisons linéaires telles que $\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2$ des formes cubiques apolaires par rapport aux premières; les racines doubles des premières ainsi que celles des secondes formes sont les racines du jacobien de f_1 et de f_2.

13. Nous avons peu de chose à ajouter en ce qui concerne la *généralisation* des théories précédentes au cas où les formes φ apolaires aux q formes f d'ordre m sont d'ordre p inférieur à m; nous remarquons, d'après les équations (4), que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme φ d'ordre p soit apolaire par rapport à une forme f d'ordre $m > p$, est qu'elle soit apolaire par rapport aux $m - p + 1$ dérivées

$$\frac{\partial^{m-p} f}{\partial x^{m-p}}, \quad \frac{\partial^{m-p} f}{\partial x^{m-p-1}\,\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-p} f}{\partial y^{m-p}};$$

les formes φ apolaires aux q formes f doivent donc satisfaire à $(m - p + 1)q$ conditions, et comme elles renferment $p + 1$ coefficients d'une manière homogène, on voit que les formes φ répondant à la question dépendent de

$$q' = p + 1 - q(m - p + 1)$$

paramètres homogènes: ce nombre q' doit être égal ou supérieur à 1, ou bien p doit être égal ou supérieur à $\frac{q(m+1)}{q+1}$, pour que le problème soit possible dans le cas général; si q' est nul ou négatif, le problème n'est possible que si les formes f sont soumises à certaines restrictions qu'il serait facile de former.

Par exemple il existe une forme φ d'ordre 4 apolaire par rapport à deux formes d'ordre 5

$$f_1 = a_0 x^5 + 5 a_1 x^4 y + \ldots + a_5 y^5,$$
$$f_2 = b_0 x^5 + 5 b_1 x^4 y + \ldots + b_5 y^5;$$

c'est

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ y^4 & -xy^3 & x^2y^2 & -x^3y & x^4 \end{vmatrix}.$$

Si (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_4, y_4) sont les quatre racines de φ, les deux formes f_1 et f_2 sont réductibles simultanément à la somme de quatre puissances cinquièmes, telles que

$$f_1 = A_1(xy_1 - yx_1)^5 + \ldots + A_4(xy_4 - yx_4)^5,$$
$$f_2 = B_1(xy_1 - yx_1)^5 + \ldots + B_4(xy_4 - yx_4)^5;$$

lorsque φ a des racines multiples, les considérations du n° 5 s'appliquent à chacune des formes f.