CALLOT

Concours général de mathématiques spéciales de 1900

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1 (1901), p. 31-34

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__31_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DE 1900.

SOLUTION PAR M. CALLOT,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Carnot.

On considère les paraboloïdes Π *représentés en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$\frac{y^2}{p+\lambda} + \frac{q+\lambda}{z^2} - 2x - \lambda = 0,$$

dans laquelle p, q sont des constantes et λ un paramètre variable, et l'on propose d'étudier la surface Σ, enveloppe des plans polaires P par rapport aux paraboloïdes W d'un point donné A.

1° *La surface Σ est de la troisième classe, et chaque plan polaire touche cette surface en tous les points d'une droite G.*

2° *Les droites G sont tangentes à une courbe gauche Γ du troisième ordre ; elles admettent un cône directeur C du deuxième degré.*

3° *La section de la surface Σ par un plan tangent, c'est-à-dire par un plan polaire P, se compose d'une droite G et d'une conique. Déduire de là le degré de la surface Σ.*

4° *Chaque droite C est le lieu des pôles d'un plan Q par rapport aux paraboloïdes Π. Chaque plan Q est perpendiculaire à la droite G correspondante.*

5° *En supposant que G décrive la surface Σ, on demande l'enveloppe C_1 des plans Q qui correspondent aux diverses droites G.*

On indiquera les relations qui lient l'enveloppe G avec les paraboloïdes Π et avec le cône C.

Remarquons que les paraboloïdes Π forment un système homofocal, c'est-à-dire font partie d'un faisceau tangentiel déterminé par l'un d'eux et l'ombilicale. Ce faisceau pourra donc se déduire dualistiquement d'un faisceau ponctuel de quadriques.

1° On sait que le lieu des pôles d'un plan R par rapport aux quadriques d'un faisceau ponctuel est une cubique gauche Γ_1. Corrélativement l'enveloppe des plans polaires P du point A par rapport au faisceau des paraboloïdes Π sera une surface de la troisième classe Σ. A deux points infiniment voisins de Γ_1 correspondront deux plans tangents infiniment voisins de Σ. On voit donc qu'à toute tangente à Γ_1 correspond une génératrice G de Σ. A tout point μ de G correspond un plan ϖ à Γ_1 qui passe par une tangente fixe, quand μ décrit G. Le plan tangent en μ correspond au point de contact de ϖ. Il est donc le même tout le long de G.

2° A deux tangentes infiniment voisines à Γ_1 correspondent deux génératrices infiniment voisines de Σ. Or les deux tangentes définissent un plan osculateur à Γ_1 auquel correspond le point de rencontre de deux génératrices; celles-ci ont donc une enveloppe. Or, comme par tout point de l'espace on peut mener trois plans osculateurs à Γ_1, on voit que dans tout plan il y aura trois points de l'enveloppe des droites G. Donc cette enveloppe est une cubique gauche Γ.

Nous verrons plus tard que les droites G admettent un cône directeur du second degré.

3° Un plan tangent à Σ correspond à un point m de Γ_1 et aux points de la surface situés dans ce plan les plans tangents à Γ_1 menés par m. Or ces plans enveloppent le cône de sommet m qui s'appuie sur Γ_1. Ce cône étant du deuxième degré, on voit que le plan tangent à Σ la coupe suivant une conique. Comme le plan est tangent tout le long d'une droite, la section se compose d'une droite et d'une conique. Il en résulte que Σ est du quatrième ordre.

4° A toute droite G correspond une tangente δ à Γ_1; or, δ étant donnée, il existe dans le plan R un point I tel que tous ses plans polaires, par rapport au faisceau ponctuel considéré au début, passent par δ. On voit donc qu'il existe bien un plan Q correspondant à I, tel que tous ses pôles par rapport aux paraboloïdes Π soient sur G. Comme I est dans le plan R, tous les plans Q passent par le point A.

La droite G doit contenir des pôles de Q par rapport à toutes les quadriques du faisceau tangentiel donné; en particulier elle contiendra leur pôle par rapport à l'ombilicale. Elle lui est donc perpendiculaire.

5° Il en résulte que Q enveloppe le cône C, de sommet A supplémentaire du cône directeur C de la surface Σ. Tous les plans tangents à C sont parallèles à des plans tangents à Σ. Donc chaque génératrice de C est perpendiculaire à un plan polaire δ. Elle est donc perpendiculaire à sa conjuguée par rapport à un des paraboloïdes Π. Or le lieu des droites qui passent par A, et qui sont perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à des quadriques homofocales, est le cône de Chasle de sommet A. Donc le cône G est du second degré, et par suite aussi le cône C.