NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Sur une représentation géométrique des fonctions $\mathrm{sn}x, \mathrm{sn}(x+K)$ et leur analogie avec les fonctions circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 241-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__241_0>

[F2g]

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES FONCTIONS $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{sn}(x+K)$ ET LEUR ANALOGIE AVEC LES FONCTIONS CIRCULAIRES;

PAR M. E. IAGGI.

1. Les fonctions

$$u = \operatorname{sn}(x, k), \qquad v = \operatorname{sn}(x + K, k),$$

que, dans ce Journal même ([1]) et dans un Mémoire présenté, en 1900, à l'Académie des Sciences, nous avons proposé d'appeler des *sinus* et *cosinus elliptiques* ($u = \sin_e x$, $v = \cos_e x$) à cause de leur parfaite analogie avec les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, sont susceptibles d'une représentation géométrique qui s'étend non seulement aux relations entre les trois covariables x, u, v, mais encore à la multiplication et à la division de l'argument x par 2^n, et à diverses transformations parmi lesquelles celles de Landen et de Gauss.

La représentation géométrique qu'a donnée M. Lémeray, dans une lettre à M. Laisant parue dans ce Journal, peut conduire à celle que nous avons en vue; mais celle-ci s'introduit d'une manière naturelle par la considération de la courbe dont l'équation, en coordonnées rectangulaires u, v, est la relation algébrique qui existe entre les fonctions u_x et v_x

$$u^2 + v^2 = 1 + k^2 u^2 v^2, \tag{1}$$

équation qui peut se mettre sous diverses autres formes

([1]) *Nouvelles Annales*, 1898, 1900.

qui nous seront utiles

$$(2)\qquad u = \pm\sqrt{\frac{1-v^2}{1-k^2v^2}},\qquad v = \pm\sqrt{\frac{1-u^2}{1-k^2u^2}},$$

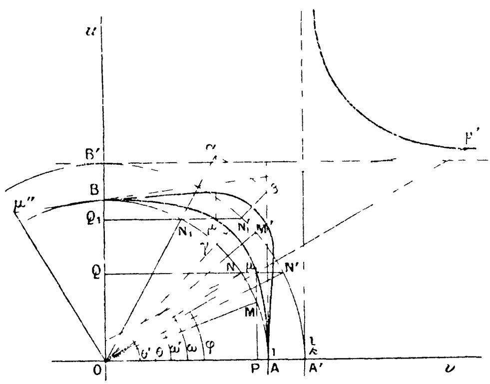
$$(3)\ (1-k^2u^2)(1-k^2v^2) = k'^2,\qquad (1-u^2)(1-v^2) = k'^2u^2v^2,$$

$$(4)\qquad \frac{(1\pm ku^2)(1\pm kv^2)}{1\pm k} = u^2+v^2 = \frac{1-k^2u^4}{1-k^2u^2} = \frac{1-k^2v^4}{1-k^2v^2}$$

ou en coordonnées polaires

$$(5)\qquad r^2 = 1 + \frac{k^2}{4}\,r^4\sin^2 2\varphi.$$

Cette équation montre que, lorsque k est réel et plus petit que *un*, ce que nous supposons, la courbe se compose d'une branche fermée enveloppant le cercle de rayon *un* et tangente à ce cercle aux points A, B, A_1,



B_1, sur les axes Ov, Ou, et de quatre branches infinies aux asymptotes

$$u, v = \pm\frac{1}{k}.$$

Les points de la branche fermée sont tels que les valeurs absolues de u et de v sont inférieures à *un* et répondent par conséquent aux valeurs réelles de x et aux valeurs de la forme $x + 2niK'$; les branches infinies, pour lesquelles $|u|$, $|v|$ sont supérieurs à *un*, répondent à des valeurs de la forme $x + (2n + 1)iK'$, (x réel). Nous considérerons donc particulièrement les points de la branche fermée, et comme la courbe a pour axes de symétrie les axes Ov, Ou et leurs bissectrices, nous pouvons nous borner pour l'instant à l'étude des points μ_x de cette branche situés dans le premier quadrant.

Cherchons ce qu'est l'argument x relatif à un point $\mu(u, v)$ de la courbe (1). Posons

$$\frac{u_x}{v_x} = \operatorname{tang}\varphi,$$

φ étant l'angle $AO\mu$. En différentiant, nous avons

$$(v_x u'_x - u_x v'_x)\, dx = (u_x^2 + v_x^2)\, d\varphi.$$

D'ailleurs

$$vu' - uv' = 1 - k^2 u^2 v^2 = 2 - (u^2 + v^2).$$

On a donc

$$dx = \frac{r^2}{2 - r^2}\, d\varphi, \tag{6}$$

x n'est ni l'arc, ni l'aire de la courbe (1). Mais si l'on pose

$$\rho^2 = \frac{r^2}{2 - r^2},$$

x sera le double de l'aire balayée par le rayon ρ dans la courbe de coordonnées ρ et φ, dont l'équation obtenue au moyen de (5) est

$$\rho^4(1 - k^2 \sin^2 2\varphi) = 1.$$

Mais on peut aussi procéder de la manière suivante qui nous servira ensuite : l'équation (5) donne deux valeurs positives r, r' du rayon vecteur qui correspondent aux deux points μ, μ', l'un μ sur la branche fermée, l'autre μ' dans la même direction φ, sur la branche infinie du premier quadrant, et ces deux longueurs sont telles que

$$(7) \qquad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = 1,$$

et, par suite,

$$(8) \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{2}{r^2} - 1 = 1 - \frac{2}{r'^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 2\varphi}.$$

On constate facilement que la courbe (ρ, φ) est une courbe fermée qui a les quatre axes de symétrie de la courbe (r, φ) et qui enveloppe la branche fermée de celle-ci et lui est tangente, ainsi qu'au cercle de rayon *un*, aux quatre points A, B, A_1, B_1.

On a d'ailleurs

$$(9) \qquad \frac{K}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \, d\varphi, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \, d\varphi.$$

La symétrie montre que, lorsque ρ s'augmente de $\frac{\pi}{2}$, x s'augmente de K et réciproquement, mais que, malgré l'analogie de la première formule (9) avec la suivante, on ne peut étendre ce raisonnement à l'addition $\frac{\pi}{4}$ à φ ou de $\frac{K}{2}$ à x.

L'argument $K - x$ est obtenu en prenant le symétrique de $O\mu$ par rapport à la bissectrice de $\nu O u$. La quadruple symétrie des deux courbes rend compte alors des relations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u(K \pm x) = v(x), & v(K \pm x) = \mp u(x), \\ u(2K \pm x) = \mp u(x), & v(2K \pm x) = - v(x), \\ u(4K \pm x) = \pm u(x), & v(4K \pm x) = v(x). \end{array} \right.$$

Ces relations, comme les substitutions réelles qu'on en tire et qui laissent invariables les fonctions u et v, sont *identiques* à celles qui sont relatives aux fonctions circulaires $\sin \frac{\pi}{2K} x$, $\cos \frac{\pi}{2K} x$.

La représentation géométrique de l'argument x que nous venons d'obtenir est entièrement analogue à celle des fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, où x peut être considéré comme la longueur de l'arc du cercle de rayon *un*, mais aussi comme le double de l'aire du secteur déterminé par le rayon du point considéré

$$(\sin x, \cos x).$$

Lorsque k s'annule, les deux courbes (r, φ) et (ρ, φ) se réduisent toutes deux au cercle de rayon *un*, et les deux fonctions $u(x, k)$, $v(x, k)$ aux fonctions $\sin x$, $\cos x$.

L'égalité (7) donne la construction de μ', connaissant μ : on fera tourner μ de $\frac{\pi}{2}$; la tangente au cercle rayon *un* menée par ce nouveau point déterminera μ' sur $O\mu$.

Le point de coordonnées

$$u(x+iK') = \frac{1}{ku(x)}, \qquad v(x+iK') = \frac{1}{kv(x)}$$

n'est autre, on le voit par son angle φ, que le symétrique de μ' par rapport à la bissectrice de vOu.

Les formules démontrées précédemment (1) à (8) suffisent pour construire géométriquement les quantités u, v, φ ou x, r, r', ρ lorsqu'on se donne l'une d'entre elles; mais de nouvelles données que nous introduisons ci-après simplifient beaucoup ces constructions.

2. *Construction des courbes* (r, φ) *ou* (u, v) *et* (ρ, φ). — Par un point μ_x de coordonnées $v_x = r\cos\varphi$,

$u_x = r \sin\varphi$, menons les parallèles μP, μQ aux axes Ou, Ov.

Soient O_1 et O'_1 les deux cercles concentriques de rayons respectifs 1 et $\frac{1}{k}$.

μP rencontre O_1 et O'_1 respectivement en M, M'; μQ rencontre respectivement O_1 et O'_1 en N, N'. (M, M', N, N' seront les plus rapprochés des points d'intersection de μP et μQ avec les deux cercles.) Posons

$$\widehat{MOA} = \omega, \qquad \widehat{N'OA'} = \omega',$$
$$\widehat{MOA} = \theta, \qquad \widehat{N'OA'} = \theta.$$

On aura

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_x &= \sin\omega = \frac{1}{k}\sin\omega, \\ v_x &= \cos\theta = \frac{1}{k}\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

Dans la notation de Jacobi, on aurait

$$\begin{aligned} u_x &= \sin\operatorname{am}(x, k), & \omega &= \operatorname{am}(x, k), \\ v_x &= \sin\operatorname{co}\operatorname{am}(x, k), & \frac{\pi}{2} - \theta &= \operatorname{co}\operatorname{am}(x, k). \end{aligned}$$

On voit aussi que

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\pm\sqrt{1-u^2} = \cos\omega \quad (= \operatorname{cn} x), & &\pm\sqrt{1-k^2u^2} = \cos\omega' \quad (= \operatorname{dn} x). \\ &\pm\sqrt{1-v^2} = \sin\theta, & &\pm\sqrt{1-k^2u^2} = \sin\theta, \end{aligned} \right.$$

et, enfin, par les relations (2) et (3)

$$(13) \qquad \sin\omega = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'},$$

$$(14) \qquad \cos\theta = \frac{\cos\omega}{\cos\omega'},$$

$$(15) \qquad \sin\theta' \cos\omega' = k',$$

$$(16) \qquad \operatorname{tang}\theta \quad = k' \operatorname{tang}\omega.$$

Ces formules sont toujours vraies en grandeur et en signe, ainsi qu'on le vérifie par la suite.

Si l'on se donne l'un des quatre angles précédents, $\omega = \text{AON}$, par exemple, on a à construire μ_x, connaissant $u_x = \sin\omega$; la parallèle NQ à Ov détermine sur le cercle O'_1 deux points N' symétriques et, par suite, une seule valeur de $\sin\omega'$, mais deux valeurs égales et de signes contraires de $\cos\theta$ par la formule (14) ; on construit d'ailleurs facilement $\cos\theta$ par la parallèle à ON' menée par N jusqu'à Ou. On a ainsi les deux valeurs de v_x égales et de signes contraires données par la formule (4).

On saura donc construire μ_x, connaissant l'une de ses coordonnées ou l'un des quatre angles ω, ω', θ, θ'. Construisons maintenant le ρ_x correspondant à μ_x. La formule (8) montre que ρ est une moyenne proportionnelle entre 1 et la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 2\varphi}}, \tag{17}$$

qui suffit à la construction. Mais l'expression

$$dx = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 2\varphi}} \tag{18}$$

montre, si on la multiplie par 2, que $\sin 2\varphi = u(2x)$, $2\varphi = \text{am}\, 2x$, ce qu'on peut vérifier sur la seconde des formules analytiques suivantes qu'on déduit du théorème d'addition de $u\ (x)$ (*loc. cit.*) :

$$u(2x) = \frac{2u_x v_x}{1 + k^2 u_x^2 v_x^2} = \frac{2u_x v_x}{u_x^2 + v_x^2}, \tag{19}$$

et où l'on fait $u_x = v_x \operatorname{tang}\varphi$. 2φ est donc pour μ_{2x} ce qu'est ω pour μ_x, et l'on peut construire μ_{2x} avec 2φ comme μ_x avec ω. Si $N'_1 N_1 Q_1$ est la parallèle à Ov, on a

$$u(2x) = \sin 2\varphi = \frac{1}{k} \sin 2\varphi'.$$

où $2\varphi' = \widehat{A'ON'_1}$. L'abscisse du point μ_{2x} sera de même

$$\nu(2x) = \cos 2\psi = \frac{1}{k}\cos 2\psi' \qquad \left(= \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}\right),$$

où $2\psi = \widehat{AOM_1}$, $2\psi' = \widehat{A'OM'_1}$, $M'_1\,\mu_{2x}M_1P_1$ étant la parallèle à Ou. On a ainsi, par une construction simple, la quantité $\nu(2x)$ dont la formule analytique est

$$(20) \qquad \nu(2x)\,\frac{\nu_x^2 - u_x^2}{1 - k^2 u_x^2 \nu_x^2} = \frac{\nu_x^2 - u_x^2}{2 - (u_x^2 + \nu_x^2)}.$$

Ces formules (19) et (20) montrent que $u(2x)$ et $\nu(2x)$, qui sont rationnelles en u_x, ν_x (¹), ont, la première, deux valeurs égales et de signes contraires, la seconde, une seule valeur lorsqu'on se donne soit u_x, soit ν_x. Notre construction géométrique donne également ce résultat, car, si l'on se donne u_x ou ω, on a deux valeurs supplémentaires de ω', d'où deux valeurs égales et de signes contraires de ν_x, ou deux valeurs supplémentaires de φ et, par suite, deux valeurs de $\sin 2\varphi$ égales et de signes contraires, et de même pour $2\varphi'$; alors $\cos 2\varphi$ et $\cos 2\varphi'$ et, par suite, $\cos 2\psi$ n'ont qu'une seule valeur.

La formule (8) donne maintenant

$$(21) \qquad \frac{1}{\rho_x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{p'^2} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 2\varphi} = \cos 2\varphi',$$

$$(22) \qquad \rho_x^2 = \sec 2\varphi'.$$

On a donc ρ par une moyenne proportionnelle entre

(¹) Cette remarque, ainsi que la suivante, n'est qu'un cas particulier d'un théorème général qu'on peut démontrer sur $u(mx)$, $\nu(mx)$, exprimés en u_x, ν_x simultanément ou séparément (Mémoire présenté, etc.; 1900). On peut remarquer l'analogie des formules (19), (20) avec les formules de $\sin(2x)$, $\cos 2x$ auxquelles elles se réduisent lorsque $k = 0$.

$\sec 2\varphi'$ et le rayon du cercle O_1 [1], puis par les formules (7) et (21)

$$(23) \qquad \begin{cases} r = \sec\varphi', \\ r' = \operatorname{cosec}\varphi'. \end{cases}$$

Ces dernières formules permettent de construire μ_x lorsqu'on se donne φ ou ρ; car si φ est donné, on construit 2φ et $2\varphi'$ comme plus haut et les formules (22), (23) donnent les constructions de ρ, r, r'; si ρ est donné seul, on a $\sec 2\varphi'$ par une troisième proportionnelle (22), et, ayant $2\varphi'$, on a 2φ et d'autre part r et r'.

3. *Multiplication et division de l'argument par* 2^n. — Les constructions précédentes nous ont donné le point de coordonnées $u_{2x} = \sin 2\varphi$, $v_{2x} = \cos 2\psi$ lorsqu'on connaît le point $u_x = \sin\omega$, $v_x = \cos\theta$ ou seulement l'une de ses coordonnées. En répétant n fois cette

---

[1] Si par μ_{2x} on mène la parallèle Ou jusqu'à ON, on obtient un point α tel que $O\alpha = \sec 2\varphi'$. L'ordonnée de N_1 étant u_{2x}, l'abscisse de α étant v_{2x} et, d'autre part, N_1 décrivant le cercle O_1 et α décrivant l'ellipse d'axes 1 et $\frac{1}{k'}$, on obtient ainsi la représentation géométrique de M. Lémeray dans le cas de l'argument $x_1 = 2x$. La quantité $\rho = \sqrt{ON_1 . O\alpha}$ a la même valeur que précédemment, mais est employée d'une manière différente, puisqu'ici le rayon sur lequel on porte ρ est $O\alpha$.

Remarquons que la droite $O\gamma N'$, rencontre la tangente en A à O_1 en un point β tel que $O\beta = \sec 2\varphi' = O\alpha$; si l'on a décrit un cercle de centre O et de rayon $O\beta = \sec 2\varphi'$, ce cercle donne sur ON, le point α qui, projeté sur QN_1N', donne μ_{2x} : on a construit ainsi l'expression $v_{2x} = \sec 2\varphi' \cos 2\varphi$. Cette construction, qu'on peut faire pour tout point μ dont on donne l'amplitude correspondante, peut remplacer la construction, donnée précédemment, de v, connaissant u ou ω. Si alors par β et γ on même un cercle tangent à $O\mu$, le point de contact est le point (ρ, φ) cherché de la courbe dont l'axe représente $\frac{1}{2}x$.

construction, on aura le point de coordonnées

$$u(2^n x), \quad v(2^n x).$$

On passe avec la même facilité du point μ_{2x} au point μ_x; car on a à construire μ_x, connaissant $\varphi = \frac{\operatorname{am} 2x}{2}$ et φ'. On sait donc construire, au moyen de $\mu_x(u_x, v_x)$ le point dont les coordonnées sont $u_{\frac{x}{2}}$, $v_{\frac{x}{2}}$ dont on trouve facilement l'expression soit en μ_x soit en v_x sous la forme

$$(24) \quad \begin{cases} u_{\frac{x}{2}} = \dfrac{\sqrt{1 + u_x} - \sqrt{1 - u_x}}{\sqrt{1 + k u_x} + \sqrt{1 - k u_x}} \\[2ex] \quad\;\; = \dfrac{\sqrt{2(1 - v_x)}}{\sqrt{1 + k}\sqrt{1 + k v_x} + \sqrt{1 - k}\sqrt{1 - k v_x}}, \\[2ex] v_{\frac{x}{2}} = \dfrac{\sqrt{1 + u_x} + \sqrt{1 - u_x}}{\sqrt{1 + k u_x} + \sqrt{1 - k u_x}} \\[2ex] \quad\;\; = \dfrac{\sqrt{2(1 + v_x)}}{\sqrt{1 + k}\sqrt{1 + k v_x} + \sqrt{1 - k}\sqrt{1 - k v_x}}. \end{cases}$$

Les signes des radicaux sont arbitraires dans ces formules qui sont celles de $u_{\frac{x}{2}}$, $v_{\frac{x}{2}}$ exprimées soit en u_x, soit en v_x. Comme dans le cas des formules trigonométriques analogues auxquelles celles-ci se réduisent lorsque $k = 0$, on peut discuter les diverses valeurs obtenues en prenant tous les arguments

$$\frac{x + 4m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'}{2}, \quad \frac{2(2m + 1)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' - x}{2},$$

déterminés par une valeur donnée de u_x, et tous les arguments

$$\frac{4mk + 2ni\mathrm{K}' \pm x}{2},$$

déterminés par une valeur donnée de v_x. Cette discussion peut se faire également sur notre représentation géométrique, mais, pour ne pas trop allonger cette Note, nous nous bornons à dire que les signes indiqués dans les formules (24) sont ceux de valeurs de $u_{\frac{x}{2}}$, $v_{\frac{x}{2}}$ qui se correspondent, μ_x étant sur la branche fermée, et qu'en changeant successivement les signes des radicaux en numérateurs, on obtiendra tous les points $\mu_{\frac{x}{2}}$ de la branche fermée; un changement de signe d'un radical au dénominateur donnerait des points $\mu_{\frac{x}{2}}$ sur une branche infinie, répondant par conséquent à une valeur imaginaire de l'argument de la forme $\frac{x}{2} + i\mathrm{K}'$.

Si l'on répète n fois les constructions qui donnent $\mu_{\frac{x}{2}}$, on obtiendra les points de coordonnées

$$u\left(\frac{x}{2^n}\right), \quad v\left(\frac{x}{2^n}\right);$$

il faut remarquer que, lorsque n est supérieur à 1, certaines valeurs sont imaginaires; mais il y en a toujours de réelles.

On trouvera facilement le nombre de ces valeurs réelles : le nombre des points μ obtenus sur la branche fermée est égal au nombre de points $\sin(2^{-n}x)$, $\cos(2^{-n}x)$ obtenus dans les mêmes circonstances, soit qu'on se donne u_x, soit qu'on se donne v_x; d'ailleurs, à chacun de ces points $\mu(u, v)$ correspond un point sur une branche infinie $\left(\frac{1}{ku}, \frac{1}{kv}\right)$; le nombre total de ces points μ obtenus sera donc le double des points

$$[\sin(2^{-n}x), \cos(2^{-n}x)]$$

obtenus dans les mêmes circonstances.

4. *Sur quelques transformations.* — Dans notre Mémoire cité, nous avons démontré la plupart des formules suivantes, où nous écrivons simplement u, v, pour les fonctions de module k et d'argument x, et $\sin_e(g_1 x, k)$, $\cos_e(g_1 x, k)$ pour les fonctions transformées, de module k_1 et d'argument $g_1 x$:

$$
\mathrm{I}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e[(k \pm ik')x, (k \mp ik')^2] = (k \pm ik')\frac{u}{v},\\
&\cos_e[(k \pm ik')x, (k \mp ik')^2] = \frac{1 - k(k \pm ik')u^2}{1 - k(k \mp ik')u^2}\\
&\qquad = -\frac{k \pm ik' - kv^2}{k \mp ik' - kv^2},
\end{aligned}\right.
$$

transformations auxquelles on est conduit en formant l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\frac{u}{v}$ analogue à $\operatorname{tang} x$ (*Nouvelles Annales*, 1898).

$$
\mathrm{II}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left(kx, \frac{1}{k}\right) = ku,\\
&\cos_e\left(kx, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{v},
\end{aligned}\right.
$$

auxquelles conduit la comparaison des deux transformations I, l'une de module $(k - ik')^2$, l'autre de module $(k + ik')^2$.

$$
\mathrm{III}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left[(1 \pm k')x, \frac{1 \mp k'}{1 \pm k'}\right] = (1 \pm k')uv\\
&\cos_e\left[(1 \pm k')x, \frac{1 \mp k'}{1 \pm k'}\right] = \frac{1 - (1 \pm k')u^2}{1 - (1 \pm k')u^2}\\
&\qquad = -\frac{1 - (1 \pm k')v^2}{1 - (1 \mp k')v^2} = \frac{v^2 - u^2}{1 - (1 \mp k')u_2}\\
&\qquad\qquad \text{(transformations de Landen),}
\end{aligned}\right.
$$

qu'on obtient en appliquant les transformations I aux fonctions III

$$\text{IV}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left(\frac{1\pm k}{2}x,\ \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right)=\sqrt{\frac{1\pm k}{2}\,\frac{1-v}{1\mp kv}}\\
&\qquad=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+u}\sqrt{1\pm ku}-\sqrt{1-u}\sqrt{1\mp ku}\right)\ (1),\\
&\cos_e\left(\frac{1\pm k}{2}x,\ \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right)=\sqrt{\frac{1\pm k}{2}\,\frac{1+v}{1\pm kv}}\\
&\qquad=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+u}\sqrt{1\pm ku}+\sqrt{1-u}\sqrt{1\mp ku}\right),
\end{aligned}\right.$$

qu'on obtient par inversion des transformations III.

$$\text{V}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left[(1\pm k)x,\ \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right]=\frac{1\pm k}{1\pm ku^2}u=\frac{1\pm kv^2}{u^2+v^2}u,\\
&\cos_e\left[(1\pm k)x,\ \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right]=\frac{1\pm k}{1\pm kv^2}v=\frac{1\pm ku^2}{u^2+v^2}v
\end{aligned}\right.$$

(transformations de Gauss),

qu'on obtient en doublant l'argument des fonctions IV.

$$\text{VI}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left(\sqrt{\pm k}\,x,\ \frac{1\pm k}{2\sqrt{\pm k}}\right)=\sqrt{\frac{\pm 2k}{1\pm k}\,\frac{1-v}{1\pm kv}},\\
&\cos_e\left(\sqrt{\pm k}\,x,\ \frac{1\pm k}{2\sqrt{\pm k}}\right)=\sqrt{\frac{2}{1\pm k}\,\frac{1\pm kv}{1+v}},
\end{aligned}\right.$$

qu'on obtient en appliquant la transformation II aux fonctions IV, ou en faisant l'inversion des transformations I.

$$\text{VII}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e(ix,\ k')=\frac{iu}{\sqrt{1-u^2}},\\
&\cos_e(ix,\ k')=\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}}=\frac{\sqrt{1-k^2v^2}}{k'}\qquad\left(=\frac{1}{\operatorname{dn}x}\right),
\end{aligned}\right.$$

---

(1) Dans les formules qui, comme celles-ci, contiennent des radicaux, nous n'avons mis qu'un signe devant chaque radical, mais ce signe est arbitraire et l'on peut discuter les diverses valeurs comme pour les formules (24).

obtenues par la comparaison des deux transformations VI de modules $\frac{1+k}{2\sqrt{k}}$ et $\frac{1-k}{2i\sqrt{k}}$.

$$\text{VIII}\quad \left|\begin{array}{l} \sin_e\left(ik'x, \dfrac{1}{k'}\right) = \dfrac{ik'u}{\sqrt{1-u^2}}, \\ \cos_e\left(ik'x, \dfrac{1}{k'}\right) = \sqrt{1-k^2u^2} = \dfrac{k'}{\sqrt{1-k^2v^2}} \qquad (= \mathrm{dn}\,x), \end{array}\right.$$

obtenues par l'application de la transformation II aux fonctions VII.

$$\text{IX}\quad \left|\begin{array}{l} \sin_e\left(k'x, \dfrac{ik}{k'}\right) = \sqrt{1-v^2} = \dfrac{k'u}{\sqrt{1-k^2u^2}}, \\ \cos_e\left(k'x, \dfrac{ik}{k'}\right) = \sqrt{1-u^2} = \dfrac{k'v}{\sqrt{1-k^2v^2}} \qquad (= \mathrm{cn}\,x), \end{array}\right.$$

obtenues en comparant les deux transformations V, ou les deux transformations IV, ou en appliquant la transformation VIII aux fonctions II.

$$\text{X}\quad \left|\begin{array}{l} \sin_e\left(ikx, \dfrac{k'}{ik}\right) = \dfrac{iku}{\sqrt{1-k^2u^2}}, \\ \cos_e\left(ikx, \dfrac{k'}{ik}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \left(= \dfrac{1}{\mathrm{cn}\,x}\right), \end{array}\right.$$

obtenues en appliquant la transformation II aux fonctions IX.

$$\text{XI}\quad \left|\begin{array}{l} \sin_e\left[i(1\pm k)x, \dfrac{1\mp k}{1\pm k}\right] = (1\pm k)\dfrac{iu}{\Delta u} = (1\pm k)\dfrac{iuv}{\sqrt{1-u^2}}, \\ \cos_e\left[i(1\pm k)x, \dfrac{1\mp k}{1\pm k}\right] = \dfrac{1\pm ku^2}{1\mp ku^2} = \dfrac{1\pm k}{1\mp k}\,\dfrac{1\mp kv^2}{1\pm kv^2}, \end{array}\right.$$

obtenues en appliquant les transformations III aux fonctions VII ou X, ou les transformations I aux fonctions VIII ou IX; transformation remarquable en ce que, répétée, elle donne à nouveau le module k et aboutit aux fonctions $u(2x, k)$ et $v(2x, k)$; on le voit par son inverse qui est

$$\text{XII}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left(i\,\frac{1\pm k}{2}\,x,\ \frac{1\mp k}{1\pm k}\right) = i\sqrt{\frac{1\pm k}{1\mp k}}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}},\\
&\cos_e\left(i\,\frac{1\pm k}{2}\,x,\ \frac{1\mp k}{1\pm k}\right) = \sqrt{\frac{1\pm k}{1\mp k}}\sqrt{\frac{1-kv}{1+kv}}.
\end{aligned}\right.$$

La transformation III appliquée a ces fonctions donne les suivantes

$$\text{XIII}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left[i\,\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}\,x,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right] = i\,\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}\,\frac{1-kv}{1+kv}},\\
&\cos_e\left[i\,\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}\,x,\ \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right] = \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\,\frac{1-\sqrt{k}\,v}{1+\sqrt{k}\,v}\quad (^1)
\end{aligned}\right.$$

---

(1) On peut faire, au sujet de ces transformations, diverses remarques intéressantes, que nous ne pouvons qu'indiquer dans ce Mémoire, relatif à des représentations géométriques

(a) Il n'existe, à proprement parler, qu'une seule transformation du premier degré du sinus elliptique $u_{x,k} = \operatorname{sn} x$, qui est donnée par la première formule I, les cinq autres transformations connues du premier degré, qui sont ici données par la seconde formule I et par la seconde formule XIII, où les signes de k et de $\sqrt{k}$ sont arbitraires, sont, à proprement parler, des transformations du cosinus elliptique $v_x = \operatorname{sn}(x + K)$ De même les transformations de Gauss de $u_{x,k}$ (première formule V) sont, à proprement parler, les seules transformations du second degré du sinus elliptique, les autres transformations du second degré, qui sont données ici par les secondes formules I, III, V, XI sont à proprement parler des transformations du cosinus elliptique

On peut, sans se servir de la transformation, un peu laborieuse, de l'intégrale elliptique faite par Jacobi, arriver directement à ces transformations rationnelles par une méthode simple qui procède plutôt des idées et que nous nous contenterons d'indiquer on exprimera qu'une fonction rationnelle (du premier ou du second degré) de u ou de v est impaire s'il s'agit de u, ou paire s'il s'agit de v, puis, on fera les substitutions $x + iK$, $x + iK_1$, en se servant, pour les hypothèses à faire sur iK'_1, ., de ce que la fonction rationnelle admet toutes les substitutions de u ou de v, selon le cas Les et toutes celles qui en résultent par les changements de signe de k et $\sqrt{k}$, en tout quatre transformations ; on peut obtenir aussi ces fonctions en appliquant les transformations XI aux fonctions IV, ou III à VI, etc.

Toutes ces transformations trouvent leurs représentations géométriques sur la figure précédente, sauf bien entendu le facteur $\sqrt{-1}$ qui entre dans quelques-unes d'entre elles.

Ainsi les fonctions II de module $\frac{1}{k}$ et d'argument kx sont

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= ku = \sin\omega', \\ v_1 &= \frac{1}{v} \quad = \sec\theta, \end{aligned} \right.$$

---

identifications donneront les coefficients de la transformation rationnelle.

(b). On remarquera aussi que les secondes formules I, III, XI, linéaires par rapport à $u^2 = \mathrm{sn}^2 x$ permettent d'exprimer sous trois formes (doubles), la fonction de Weierstrass

$$\wp(x \mid 2\mathrm{K}, i\mathrm{K}') = -\frac{1+k^2}{3} + \frac{1}{\mathrm{sn}^2 x}$$

en fonction linéaire d'un cosinus elliptique. On a ainsi, sous trois formes (doubles à cause des doubles signes, c'est-à-dire de six manières), les transformations linéaires, en un cosinus, de la fonction $\wp$ que nous avons démontrées directement (*Nouvelles Annales*, 1898).

(c). Nous avons constaté jusqu'ici des analogies directes de nos deux fonctions u_x, v_x avec les fonctions circulaires; les formules de transformation nous montrent d'autres analogies : ainsi les formules (2) qui expriment u_x en fonction de v, et v_x en fonction de u_x, ont une analogie directe avec les formules

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}, \qquad \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x},$$

auxquelles elles se réduisent lorsque $k = 0$; mais les transformations IX qui montrent que $\sqrt{1-v^2}$ est un sinus elliptique, et $\sqrt{1-u^2}$ un cosinus elliptique $\left(\arg. k'x, \bmod \frac{ik}{k'}\right)$ sont également les analogues des formules trigonométriques précédentes auxquelles elles se réduisent d'ailleurs lorsque $k = 0$; nous avons là un exemple de ce et se construisent facilement. Cette transformation permet d'éviter la construction et l'étude de la courbe (1) dans le cas où k est plus grand que 1.

Les fonctions réelles IX, qu'on pourrait directement représenter au moyen de la courbe

$$u_1^2 + v_1^2 = 1 - \frac{k^2}{k'^2} u_1^2 v_1^2$$

ou

$$(k'^2 + k^2 u_1^2)(k'^2 + k^2 v_1^2) = 1,$$

trouvent leur représentation sur la figure précédente par les formules (12)

$$\text{(IX)} \qquad \begin{cases} \sin \theta = u_1, \\ \cos \omega = v_1 \qquad (= \operatorname{cn} x). \end{cases}$$

---

que nous appellerons les *analogies secondes*. En voici d'autres : les formules (19) et (20) de $u(2x)$ et $v(2x)$ ont une analogie directe, ou *première*, avec les formules de $\sin 2x$, $\cos 2x$; les formules III (transformations de Landen) sont également les analogues des formules de $\sin 2x$, $\cos 2x$ (analogie seconde); on peut remarquer que, dans les deux cas, la période $4K$ [celle qui donne la substitution $(2K - x)$ pour u_x] est divisée par 2. Si l'on pose

$$x_1 = (1 \pm k')x,$$

et si u_1 est le sinus elliptique transformé de Landen (III), on a

$$du_1 = (v_x^2 - u_x^2)\, dx_1,$$

formule *identique* à celle qu'on obtient en faisant

$$k = 0 \qquad \text{ou} \qquad u_1 = \sin 2x, \qquad x_1 = 2x.$$

Les formules (24) de division par 2 de l'argument de u_x, v_x, et les formules IV (transformation inverse de Landen) présentent respectivement les deux sortes d'analogie signalées plus haut, avec les formules trigonométriques de $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, ... Ces deux sortes d'analogies se retrouvent dans toute cette théorie. La notion des analogies secondes, qui nous paraît être des plus importantes, montre que, dans une théorie faite en prenant pour éléments u_x et v_x, les formules de transformation devraient être introduites dès le début.

Les fonctions VIII, dont l'une est imaginaire, trouvent leurs représentations au moyen des formules

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{cases} ik'\operatorname{tang}\omega = u_1, \\ \cos\omega' = v_1 \qquad (= \operatorname{dn} x). \end{cases}$$

Les fonctions X et VII trouvent leurs représentations au moyen des formules

$$\text{(X)}\qquad \begin{cases} i\operatorname{tang}\omega' = u_1, \\ \operatorname{séc}\omega = v_1 \qquad \left(= \dfrac{1}{\operatorname{cn} x}\right), \end{cases}$$

$$\text{(VII)}\qquad \begin{cases} i\operatorname{tang}\omega = u_1, \\ \operatorname{séc}\omega' = v_1 \qquad \left(= \dfrac{1}{\operatorname{dn} x}\right). \end{cases}$$

Les fonctions XI trouvent leurs représentations au moyen des formules

$$\text{(XI)}\qquad \begin{cases} i\,\dfrac{\sin\omega \pm \sin\omega'}{\cos\omega\cos\omega'} = u_1, \\[2ex] \dfrac{1 \pm \sin\omega\sin\omega'}{1 \mp \sin\omega\sin\omega'} = v_1. \end{cases}$$

Les fonctions I ne sont réelles qu'autant que k est supérieur à 1; le module et l'argument sont alors réels. Le sinus elliptique est $(k \pm \sqrt{k^2 - 1})\operatorname{tang}\varphi$. Mais d'ailleurs, si k est plus grand que 1, cette transformation se ramène par la transformation II à la transformation de Landen (III) relative à un module k inférieur à 1.

Remarquons que les constructions que l'on fait pour multiplier ou diviser l'argument par 2^n dans les fonctions $u(x, k)$, $v(x, k)$ donnent, grâce aux formules précédentes, les fonctions transformées (II), (IX), ..., dans lesquelles l'argument est lui-même multiplié ou divisé par 2^n; en particulier, on saura ainsi construire $\operatorname{cn}(2^n x)$, $\operatorname{dn}(2^n x)$, $\operatorname{cn}(2^{-n} x)$, $\operatorname{dn}(2^{-n} x)$.

5. La transformation de Landen (III) a une repré-

sentation très simple, car en vertu de (16), on a immédiatement

$$(25)\quad \begin{cases} \sin_e\left[(1\pm k')x,\ \dfrac{1\mp k'}{1\pm k'}\right] \\ \quad = (1\pm k')\,uv = (1\pm k')\sin\omega\cos\theta = \sin(\omega\pm\theta). \end{cases}$$

Considérons, par exemple, la transformation de module $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$. On aura

$$(26)\qquad \omega+\theta = \mathrm{am}[(1+k'), x, k_1], \qquad \omega = \mathrm{am}(x, k),$$

et nous pouvons remarquer en passant que l'égalité (16), démontrée par l'analyse des relations entre u_x et v_x donne la relation suivante, dont on trouvera une démonstration géométrique dans le calcul de J. Bertrand, et une démonstration analytique au moyen des fonctions H, Θ de Jacobi dans la *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Appell et Lacour :

$$(27)\quad \begin{cases} \mathrm{tang}\left\{\mathrm{am}\left[(1+k')x,\ \dfrac{1-k'}{1+k'}\right]\right. \\ \qquad\qquad \left. - \,\mathrm{am}(x, k)\right\} = k'\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(x, k). \end{cases}$$

Le changement de signe de k' dans cette formule donne une relation équivalente pour la transformation de module $\frac{1}{k_1}$; ce module étant plus grand que 1, nous nous occuperons plus spécialement des fonctions de module $k_1\,(<1)$ auxquelles se ramènent d'ailleurs celles de module $\frac{1}{k_1}$ par la transformation II.

Supposons tracé le cercle O''_1 de rayon $\frac{1}{k_1}$. Soit n un point de O_1 tel que $AOn = \omega_1 = \omega+\theta$. La parallèle qnn' à Ov détermine sur O''_1 le point n' tel que $AOn' = \omega'_1$ et l'on a

$$\sin\omega'_1 = k_1\sin\omega_1 = \frac{1-k'}{1+k'}\sin(\omega+\theta) = \sin(\omega-\theta).$$

Les fonctions transformées de module k pourront donc s'écrire par des formules analogues aux formules (11), (12), ...,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \sin\omega_1 = \frac{1}{k_1}\sin\omega'_1 \\ v_1 &= \cos\theta_1 = \frac{1}{k_1}\cos\theta'_1 \end{aligned}\right. \qquad \left(k_1 = \frac{1-k'}{1+k'},\ 1+k' = \frac{2}{1+k_1}\right),$$

où

$$(29)\qquad \omega_1 = \omega + \theta, \qquad \omega'_1 = \omega - \theta$$

et

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} v_1 &= \cos\theta_1 = \frac{\cos\omega_1}{\cos\omega_1} = \frac{\cos(\omega+\theta)}{\cos(\omega-\theta)}, \\ u_1 &= \sin\omega_1 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta'_1}. \end{aligned}\right.$$

La première formule (30) donne ainsi la fonction v_1 qui s'exprime en u, v par les secondes formules III analogues à celle-ci

$$(31)\quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

On sait donc construire le point (u_1, v_1) même sans se servir du cercle O''_1; on pourrait tracer la nouvelle courbe (ρ_1, φ_1) pour figurer l'argument $x_1 = (1+k')x$; mais la courbe (ρ, φ), agrandie si l'on veut dans la proportion de $\sqrt{1+k'}$ à 1, suffit à représenter l'argument.

Supposons qu'on ait fait plusieurs fois de suite la transformation précédente; les amplitudes successives sont

$$\omega_1 = \omega + \theta, \quad \omega_2 = \omega_1 + \theta_1, \quad \omega_3 = \omega_2 + \theta_2, \quad \ldots, \quad \omega_n = \omega_{n-1} + \theta_{n-1},$$

avec

$$\omega'_1 = \omega - \theta, \quad \omega'_2 = \omega_1 - \theta_1, \quad \omega'_3 = \omega_2 - \theta_2, \quad \ldots, \quad \omega'_n = \omega'_{n-1} - \theta_{n-1}.$$

et

$$\cos\theta_1 = \frac{\cos(\omega+\theta)}{\cos(\omega-\theta)}, \qquad \cos\theta_2 = \frac{\cos(\omega_1+\theta_1)}{\cos(\omega_1-\theta_1)}, \qquad \ldots,$$

$$(32) \qquad \cos\theta_n = \frac{\cos(\omega_{n-1}+\theta_{n-1})}{\cos(\omega_{n-1}+\theta_{n-1})}.$$

On tire de là

$$(33) \qquad \omega_n = \omega + \theta + \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n-1}.$$

On sait que l'amplitude ω_n et l'argument x_n lui-même croissent avec n au delà de toute limite et que les rapports de ces deux quantités à 2^n tendent vers une même limite finie $\frac{\pi x}{2K}$.

Effectuons maintenant la transformation inverse de la précédente, tout d'abord sur le point (u_1, v_1) précédent; nous devons retrouver le point $\mu_{x,k}$ par les formules IV qui s'écrivent ici

$$(34) \left\{ \begin{aligned} u(x,k) &= \sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\sqrt{\frac{1-v_1}{1-k_1v_1}} = \sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\theta_1}{\sin\frac{1}{2}\theta'_1},\\ v(x,k) &= \sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\sqrt{\frac{1+v_1}{1+k_1v_1}} = \sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\theta_1}{\cos\frac{1}{2}\theta'_1}\\ &\left(k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k}, \; x = \frac{1+k_1}{2}x_1\right). \end{aligned} \right.$$

Le rapport de ces quantités donne immédiatement

$$(35) \qquad \operatorname{tang}\varphi_{x,k} = \frac{u_{x,k}}{v_{x,k}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta'_1},$$

en sorte qu'ayant $\operatorname{tang}\varphi_{x,k}$, et par suite $\varphi_{x,k}$ par une quatrième proportionnelle à 1 et aux deux termes du dernier rapport, on saura construire le point μ_x comme il a été dit.

Observons que le dernier rapport peut s'écrire en passant aux angles ω_1, ω'_1 par les formules (30)

$$\frac{\sin\dfrac{\omega_1+\omega'_1}{2}}{\cos\dfrac{\omega_1-\omega'_1}{2}},$$

et que, d'autre part, les formules (29) donnent

$$(36) \qquad \omega = \frac{\omega_1+\omega'_1}{2}, \qquad \theta = \frac{\omega_1-\omega'_1}{2},$$

formules qui donnent immédiatement les coordonnées $u(x,k) = \sin\omega$, $v(x,k) = \cos\theta$ de la manière la plus simple, en sorte que la construction de $\tang\varphi_{x,k}$ (35) devient inutile.

On peut tirer de ces deux transformations une manière simple de trouver

$$u\left(x+\frac{K}{2}\right), \qquad v\left(x+\frac{K}{2}\right),$$

en remarquant que les transformées de Landen s'écrivent

$$(37) \begin{cases} (1+k_1)\,u_1(x_1,k_1) = 2\,u(x,k)\,v(x,k), \\ (1+k_1)\,v_1(x_1,k_1) = 2\,u\left(x+\dfrac{K}{2},\,k\right)v\left(x+\dfrac{K}{2},\,k\right) \quad (^1) \\ \left[x_1 = (1+k')x,\ k_1 = \dfrac{1-k'}{1+k'},\ (1+k')(1+k_1) = 2\right]. \end{cases}$$

---

(1) Formules analogues aux suivantes :

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$
$$\cos 2x = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

[analogie seconde, *voir* la note (c)].

On peut faire la remarque suivante : Ayant les formules suivantes (dont le rapport donnerait la transformation de Gauss) :

$$2uv = (1+k_1)\,u_1,$$
$$u^2+v^2 = 1+k^2u^2v^2 = 1\,k_1 u_1^2.$$

car on a

$$u_1(x_1+\mathrm{K}_1)=v_1(x_1), \qquad \mathrm{K}_1=(1+k')\frac{\mathrm{K}}{2}.$$

Si à x nous ajoutons $\frac{\mathrm{K}}{2}$, x_1 s'augmente de K_1, φ_1 s'augmente de $\frac{\pi}{2}$ et le point (u_1, v_1) tourne de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif; les nouvelles coordonnées sont

$$u_1(x_1+\mathrm{K}_1)=v_1(x_1), \qquad v_1(x_1+\mathrm{K}_1)=-u_1(x_1).$$

---

on aura, au moyen de formules démontrées au début de ce Mémoire,

$$r^2\,d\varphi=(u^2+v^2)\,d\varphi=(1-k^2u^2v^2)\,dx=(1-k_1u_1^2)\,dx;$$

d'ailleurs

$$\rho^2\,d\varphi=dx.$$

Donc

$$(\rho^2-r^2)\,d\varphi=k_1u_1^2\,dx=\frac{1+k_1}{2}k_1u_1^2\,dx_1 \qquad \left(x_1=\frac{2}{1+k_1}x\right).$$

La différence des aires des secteurs d'angle φ des courbes (ρ, φ), (r, φ), c'est-à-dire l'aire comprise entre ces deux courbes et un rayon vecteur, s'exprime donc au moyen d'une intégrale de deuxième espèce; ceci donne donc, sur la figure tracée, une représentation de l'intégrale de seconde espèce de module

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'}.$$

On peut remarquer aussi que la formule

$$\frac{r^2}{2-r^2}\,d\varphi=dx$$

s'écrit

$$dx+d\varphi=\frac{2}{r^2}\,dx=\frac{2\,dx}{1+k_1u_1^2}=\frac{(1+k_1)\,dx_1}{1+k_1u_1^2},$$

et, par conséquent, que l'intégrale du second membre, qui a l'apparence d'une intégrale de troisième espèce, s'intègre sous la forme suivante, au moyen d'une intégrale de première espèce, x_1, et d'une fonction circulaire

$$\int_0^{x_1}\frac{dx_1}{1+k_1u_1^2}=\frac{x_1}{2}+\frac{1}{1+k_1}\,\text{arc tang}\,\frac{u(x,k)}{v(x,k)}$$

$$=\frac{x_1}{2}+\frac{1}{1+k_1}\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{1+u_1}\sqrt{1-k_1u_1}-\sqrt{1-u_1}\sqrt{1-k_1u_1}}{\sqrt{1-u_1}\sqrt{1+k_1u_1}+\sqrt{1-u_1}\sqrt{1-k_1u_1}},$$

intégrale qui, si nous ne nous trompons, n'est pas connue, du moins sous cette forme qui n'emploie pas les fonctions de Jacobi.

On voit alors sur les formules (30) que ω_1 et ω'_1 sont respectivement remplacés par $\frac{\pi}{2}+\theta_1$ et $\frac{\pi}{2}+\theta'_1$ et que θ_1 et θ'_1 sont remplacés par $\frac{\pi}{2}+\omega_1$, $\frac{\pi}{2}+\omega'_1$. Le déplacement correspondant du point $(u_{x,k}, v_{x,k})$ donne le point d'argument $x+\frac{K}{2}$.

Les formules (36) donnent alors les coordonnées de ce dernier point, pourvu qu'on y fasse le changement de ω_1 et ω'_1 en $\frac{\pi}{2}+\theta_1$, $\frac{\pi}{2}+\theta'_1$ sous la forme

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} u_{x+\frac{K}{2}} &= \sin\left(\pi+\frac{\theta_1+\theta'_1}{2}\right) = -\sin\frac{\theta_1+\theta'_1}{2},\\ v_{x+\frac{K}{2}} &= \cos\frac{\theta_1+\theta'_1}{2}.\end{aligned}\right.$$

Si donc on a construit θ_1 et θ'_1, la construction s'achève sans difficulté. On pourrait remplacer θ_1 et θ'_1 par leurs valeurs en ω et θ au moyen des relations (30); mais, si l'on veut se servir de ω et de θ, on aura une construction plus simple en se servant de la formule (35), qui donne, par le changement de θ_1, θ'_1 en $\frac{\pi}{2}+\omega_1$, $\frac{\pi}{2}+\omega'_1$,

$$(39)\quad \operatorname{tang}\varphi_{x+\frac{K}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega_1}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega'_1}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega+\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega-\theta}{2}\right)},$$

Ayant $\varphi_{x+\frac{K}{2}}$, par cette formule on construit directement le point relatif à l'argument $x+\frac{K}{2}$ sans passer par les transformations (III) et (IV).

Cette formule (39) est d'ailleurs donnée directement par les expressions suivantes qu'on tire des formules d'addition :

$$(40)\quad \begin{cases} u_{x+\frac{K}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+k'}}\,\dfrac{v_x+u_x}{1+(1-k')u_xv_x}, & v_{x+\frac{K}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+k'}}\,\dfrac{v_x-u_x}{1-(1-k')u_xv_x}, \\ \quad = \dfrac{1}{\sqrt{1+k'}}\,\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\omega+\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\omega-\theta}{2}\right)}, & \quad = \dfrac{1}{\sqrt{1+k'}}\,\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\omega+\theta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\omega-\theta}{2}\right)}. \end{cases}$$

Effectuons maintenant la transformation (IV) sur le point $[u(x, k), v(x, k)]$ lui-même. Nous aurons les fonctions

$$(41)\quad \begin{cases} u_{(1)}(x_{(1)}, k_{(1)}) = \sqrt{\dfrac{1+k}{2}}\sqrt{\dfrac{1-v}{1-kv}} = \sqrt{\dfrac{1+k}{2}}\,\dfrac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta'} = \sin\dfrac{\omega+\omega'}{2}, \\ v_{(1)}(x_{(1)}, k_{(1)}) = \sqrt{\dfrac{1+k}{2}}\sqrt{\dfrac{1-v}{1-kv}} = \sqrt{\dfrac{1+k}{2}}\,\dfrac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta'} = \cos\dfrac{\omega-\omega'}{2}, \\ \operatorname{tang}\varphi_{(1)} = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta'}\;\dfrac{\sin\dfrac{\omega+\omega'}{2}}{\cos\dfrac{\omega+\omega'}{2}} \\ \left[k_{(1)} = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad x_{(1)} = \dfrac{1+k}{2}x,\quad (1+k'_{(1)})(1+k) = 2\right]. \end{cases}$$

Ces fonctions $u_{(1)}$, $v_{(1)}$ se construisent de la manière la plus simple par les angles

$$(41')\qquad \omega_{(1)} = \frac{\omega+\omega'}{2},\qquad \theta_{(1)} = \frac{\omega-\omega'}{2}.$$

Si l'on répète n fois cette transformation, le module $k_{(n)}$ tend vers 1 en restant inférieur à 1 lorsque n croît; $x_{(n)}$ croît avec n, mais tend vers une limite finie. Soit $x_{(n)} = g_{(n)}x$; on a

$$g_{(n)} = \frac{(1+k)(1+k_{(1)})(1+k_{(2)})\ldots(1+k_{(n-1)})}{2^n}$$
$$= \frac{1}{(1+k'_{(1)})(1+k'_{(2)})\ldots(1+k'_{(n)})}.$$

Les quantités $k'_{(n)}$ se tirent de k, comme, dans la transformation de Landen, les quantités k_n se tirent de k'. On sait que, dans ce cas,

$$(42)\qquad \lim(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)=\frac{2K}{\pi}.$$

Donc, on a ici

$$(43)\qquad \lim(1+k'_{(1)})(1+k'_{(2)})\ldots(1+k'_{(n)})=\frac{2K'}{\pi}.$$

On peut, d'ailleurs, démontrer directement cette formule comme la précédente ou passer du premier cas au second, en remarquant que les quantités $k'_{(n)}$ sont les modules des transformations de Landen appliquées aux fonctions $u(x, k')$, $v(x, k')$, pour lesquelles la quantité K des fonctions de module k est remplacée par K′.

$g_{(n)}$ a donc une limite qui est $\frac{\pi}{2K'}$, et, par suite,

$$(44)\qquad \lim x_{(n)}=\frac{\pi x}{2K'}.$$

Comme, d'ailleurs, $k_{(n)}$ tend vers 1, on aura

$$(45)\qquad \begin{cases} \lim u(x_{(n)}, k_{(n)}) = \mathrm{Th}\,\dfrac{\pi x}{2K'}, \\ \lim v(x_{(n)}, k_{(n)}) = 1. \end{cases}$$

Le $n^{\text{ième}}$ point transformé tend donc vers un certain point de la parallèle à Ou menée par A, point qu'on construira facilement. La répétition des transformations (IV) est donc plus intéressante que celle de la transformation de Landen, inverse de (IV), qui ne conduit à aucune limite. De l'existence des limites précédentes, on pourra tirer des procédés pratiques de calcul sur lesquels nous ne pouvons insister ici; mais nous donnerons une formule, susceptible d'applications, qui montre l'importance des transformations successives (IV).

Posons

$$u(x_{(n)}, k_{(n)}) = u_{(n)}, \qquad v(x_{(n)}, k_{(n)}) = v_{(n)} \qquad (x_{(n)} = g_{(n)} x).$$

Nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}
(1+k)u(x,k) &= 2u_{(1)}v_{(1)},\\
(1+k_{(1)})u_{(1)} &= 2u_{(2)}v_{(2)},\\
(1+k_{(2)})u_{(2)} &= 2u_{(3)}v_{(3)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(1+k_{(n)})u_{(n-1)} &= 2u_{(n)}v_{(n)},
\end{aligned}$$

d'où, quel que soit (n),

$$(46) \qquad u(x,k) = \frac{u(g_{(n)}x, k_{(n)})}{g_{(n)}} v_{(1)}v_{(2)}v_{(3)}\ldots v_{(n)},$$

formule analogue (de la deuxième sorte) ([1]) à la formule trigonométrique suivante à laquelle elle se réduit pour $k=0$

$$(47) \qquad \sin x = \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{-n}} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n},$$

et qu'on démontre d'une manière analogue.

Si, maintenant, on fait croître n indéfiniment, on aura

$$(48) \quad u(x,k) = \frac{\operatorname{Th}\frac{\pi x}{2K'}}{\frac{\pi}{2K'}} v(x_{(1)}, k_{(1)})\, v(x_{(2)}, k_{(2)})\ldots v(x_{(n)}, k_{(n)})\ldots,$$

où

$$v(x_{(n)}, k_{(n)}) = v\left[\frac{(1+k)(1+k_{(1)})\ldots(1+k_{(n-1)})}{2^n}x, k_{(n)}\right]$$

tend vers 1 lorsque k croît indéfiniment. Cette formule est l'analogue de la suivante à laquelle elle se réduit lorsque $k=0$, $(K'=\infty)$,

$$(49) \qquad \sin x = x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots.$$

([1]) *Voir* la note (c).

Cette dernière a une analogue directe dans la formule qu'on peut obtenir en faisant le produit des fonctions de module k (formule de duplication)

$$u\left(\frac{x}{2^{p-1}}\right) = \frac{2u\left(\frac{x}{2^p}\right)v\left(\frac{x}{2^p}\right)}{u^2\left(\frac{x}{2^p}\right)+v^2\left(\frac{x}{2^p}\right)},$$

p prenant toutes les valeurs de 1 à n :

$$u(x) = 2^n u\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{v\left(\frac{x}{2}\right)}{u^2\left(\frac{x}{2}\right)+v^2\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{v\left(\frac{x}{2^2}\right)}{u^2\left(\frac{x}{2^2}\right)+v^2\left(\frac{x}{2^2}\right)}\cdots\frac{v\left(\frac{x}{2^n}\right)}{u^2\left(\frac{x}{2^n}\right)+v^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

n croissant indéfiniment, on a la formule

$$(50)\qquad u(x) = x\,\frac{v\left(\frac{x}{2}\right)v\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots v\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdots}{\prod_1^\infty\left[u^2\left(\frac{x}{2^n}\right)+v^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]},$$

analogue à la formule (49); nous retrouvons donc encore à ce propos les deux sortes d'analogies signalées dans la note (c).

Si l'on double l'argument dans la transformation (IV), on obtient la transformation de Gauss (V). Pour construire ces fonctions, on pourra se servir des formules (V) qui s'écrivent

$$(51)\quad\begin{cases} u_1 = u\left[(1\pm k)x, \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right] = \frac{1\pm k}{1\pm k u^2}u = \frac{\sin\omega\pm\sin\omega'}{1\pm\sin\omega\sin\omega'}, \\ v_1 = v\left[(1\pm k)x, \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right] = \frac{1\pm k}{1\pm k v^2}v = \frac{\cos\theta\pm\cos\theta'}{1\pm\cos\theta\cos\theta'}. \end{cases}$$

Au lieu de construire ces formules, on pourra doubler l'argument dans les constructions précédentes des fonctions (IV) ou, mieux encore, doubler l'argument x

d'abord, puis faire la transformation (IV). En se servant des formules démontrées

$$u(2x) = \sin 2\varphi = \frac{1}{k}\sin 2\varphi' \qquad \left(\tan\!g\,\varphi = \frac{u_x}{v_x}\right),$$
$$v(2x) = \sin 2\psi = \frac{1}{k}\sin 2\psi'$$

et des formules (41), (41′), on voit que

$$(52) \qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \sin(\varphi + \varphi'), \\ v_1 = \cos(\varphi - \varphi'), \end{array}\right.$$

ce qui permet de construire facilement le point (u_1, v_1) connaissant le point ($u = \sin\omega$, $v = \cos\theta$) dont les coordonnées polaires sont l'angle φ et le rayon $r = \sec\varphi'$ (23).

Posant

$$\frac{u_1(x_1)}{v_1(x_1)} = \tan\!g\,\varphi_1, \qquad x_1 = (1 + k)x,$$
$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \qquad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},$$

on construit le point $u_1(2x_1, k_1)$, $v_1(2x_1 k_1)$ et au moyen des deux angles $2\varphi_1$ et $2\varphi'_1$, qui sont tels que

$$u_1(2x_1, k_1) = \sin 2\varphi_1 = \frac{1}{k_1}\sin 2\varphi'_1,$$

on obtient le point dont les coordonnées sont les deuxièmes transformées de $u_x v_x$ par la transformation de Gauss

$$u_2(x_2, k_2) = \sin(\varphi_1 + \varphi'_1),$$
$$v_2(x_2, k_2) = \cos(\varphi_1 - \varphi'_1),$$
$$x_2 = (1 + k_1)x_1,$$

et ainsi de suite; on forme ainsi les $n^{\text{ièmes}}$ transformées de u_x, v_x; mais il faut remarquer que l'argument et l'amplitude croissent indéfiniment; leurs rapports avec 2^n tendent vers une limite commune qui est $\frac{\pi x}{2K'}$ (*voir* la transformation IV).

6. *Sur les fonctions hyperboliques.* — Nous avons montré qu'on pouvait représenter les parties réelles des formules qui contiennent des imaginaires. Mais on est conduit à d'autres représentations géométriques, si l'on remarque que, tandis que $u(x, k)$, $v(x, k)$ sont analogues aux fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, les fonctions d'argument purement imaginaires mises sous la forme

$$(53) \qquad U(x, k) = \frac{u(ix, k)}{i}, \qquad V(x, k) = v(ix, k),$$

sont réelles et analogues aux fonctions dites *hyperboliques*

$$\frac{\sin ix}{i} = \operatorname{Sh} x, \qquad \cos ix = \operatorname{Ch} x.$$

Les formules VII, qui expriment des fonctions de cette nature au moyen des fonctions d'argument réel $u(x, k)$, $v(x, k)$, nous conduisent, afin de pouvoir nous servir de la figure tracée et de l'étude précédente, à étudier les fonctions U, V de module k' que donnent les formules VII sous la forme

$$(54) \quad U(x, k') = \frac{u(x, k)}{\sqrt{1 - u^2(x, k)}}, \qquad V(x, k) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 u^2(x, k)}}.$$

On peut, bien entendu, étudier directement ces fonctions, ou celles de module k; c'est-à-dire tracer la courbe dont l'équation

$$(55) \qquad V^2 - U^2 = 1 - k'^2 U^2 V^2,$$

puis chercher une représentation de x par un calcul analogue à celui que nous avons fait au début de ce Mémoire; on se servira pour cela des formules en

$u(x, k')$, $v(x, k')$ et l'on y changera x en ix, u en $i\mathrm{U}$, v en V. L'argument x étant le même dans les fonctions $\mathrm{U}(x, k')$, $\mathrm{V}(x, k')$, $u(x, k)$, $v(x, k)$ [formules (54)], on retrouvera la courbe (ρ, φ) précédemment trouvée. On voit d'ailleurs immédiatement que

$$\frac{\mathrm{U}(x, k')}{\mathrm{V}(x, k')} = \frac{u(x, k)}{v(x. k)} = \operatorname{tang}\varphi,$$

c'est-à-dire que l'angle φ est le même. Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs qui permettent de faire une étude directe de $\mathrm{U}_{x, k'}$, $\mathrm{V}_{x, k}$ au moyen des angles φ, ω, θ, ..., dont nous nous sommes servis; mais considérant U_x et V_x comme les analogues de $\mathrm{Sh}\,x$, $\mathrm{Ch}\,x$, nous poserons

$$(56)\qquad \begin{cases} \mathrm{U}_{x, k'} = \mathrm{Sh}\,\Omega = \dfrac{1}{k'}\,\mathrm{Sh}\,\Omega'. \\ \mathrm{V}_{x, k'} = \mathrm{Ch}\,\Theta = \dfrac{1}{k'}\,\mathrm{Ch}\,\Theta'. \end{cases}$$

$$(57)\qquad \frac{\mathrm{U}_{x, k'}}{\mathrm{V}_{x, k'}} = \mathrm{Th}\,\Phi = \operatorname{tang}\varphi.$$

Ω, Ω', Θ, Θ' ne sont plus des arcs comme ω, ω', θ, θ', mais des secteurs hyperboliques, les cercles O_1, O'_1 de rayons 1 et $\frac{1}{k}$ étant remplacés par des hyperboles équilatères d'axes respectifs 1 et $\frac{1}{k'}$; à cet égard, nous devons dire que Θ' ne figure dans ces formules que pour la symétrie, car il est imaginaire, V restant inférieur à $\frac{1}{k'}$ ainsi qu'on le voit par l'équation de la courbe (55) qu'on peut écrire

$$(1 + k'^2\mathrm{U}^2)(1 - k'^2\mathrm{V}^2) = k^2,$$

ou

$$(58)\qquad i\,\mathrm{Ch}\,\Omega'\,\mathrm{Ch}\,\Theta' = k, \qquad \mathrm{Th}\,\Theta = k\,\mathrm{Th}\,\Omega,$$

$$\mathrm{Ch}\,\Theta = \frac{\mathrm{Ch}\,\Omega}{\mathrm{Ch}\,\Omega'}, \qquad \mathrm{Sh}\,\Omega = \frac{\mathrm{Sh}\,\Theta}{i\,\mathrm{Sh}\,\Theta'},$$

formules analogues aux formules (13), (14), (15), (16). Nous verrons plus loin par quelle quantité réelle on peut remplacer Θ'; ces formules (56), comme celles qui suivent, doivent d'ailleurs nécessairement être converties en formules trigonométriques lorsqu'on veut en faire des applications géométriques ou numériques.

Dans une lettre qu'a bien voulu m'adresser M. Lémeray, le 10 février de cette année, sur une représentation géométrique de ces fonctions, ce géomètre remplaçait le cercle et l'ellipse qui lui servaient dans le cas de $u(x, k)$, $v(x, k)$ par deux hyperboles, l'une équilatère, l'autre d'axes 1 et $\frac{1}{k'}$ [pour les fonctions $U(x, k)$, $V(x, k)$] et, se servant de la notion de *rayon vecteur hyperbolique* qu'a introduite M. Laisant dans son Ouvrage sur les fonctions hyperboliques ([1]), il obtenait une représentation analogue à celle du cas de l'argument réel, par des formules qui se déduisent des premières par le seul changement des fonctions circulaires en fonctions hyperboliques et du rayon vecteur $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ en le rayon vecteur hyperbolique $\sqrt{\xi^2 - \eta^2}$ (ξ, η étant les coordonnées orthogonales d'un point quelconque). Cette remarque d'un ordre général, utilisée en 1874 par M. Laisant (*loc. cit.*) peut conduire, dans le cas qui nous occupe, aux formules suivantes qu'on pourra d'ailleurs vérifier directement :

Soient P, R, R$'$ les rayons vecteurs hyperboliques de la courbe (ρ, φ) qui représente x et des points M, M$'$ (dont le second est imaginaire) de la courbe $(U_{x,k'}, V_{x,k})$ relatifs au secteur hyperbolique Φ, c'est-à-dire à l'angle φ. On a

---

([1]) *Essai sur la theorie des fonctions hyperboliques*, par M. C.-A. Laisant, 1874 (*Memoires de la Societé des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, 2e Cahier).

$$
(59)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
U_{x,k'} = \operatorname{Sh}\Omega = \dfrac{1}{k'}\operatorname{Sh}\Omega' = \operatorname{tang}\omega, & u_{x,k} = \sin\omega = \dfrac{1}{k}\sin\omega' = \operatorname{Th}\Omega, \\
V_{x,k'} = \operatorname{Ch}\Theta = \dfrac{1}{k'}\operatorname{Ch}\Theta' = \sec\omega', & v_{x,k} = \cos\theta = \dfrac{1}{k}\cos\theta' = \operatorname{Sech}\Theta', \\
\multicolumn{2}{c}{\dfrac{U_{x,k'}}{V_{x,k'}} = \operatorname{Th}\Phi = \dfrac{u_{x,k}}{v_{x,k}} = \operatorname{tang}\varphi \qquad (\operatorname{Ch}\Theta' = \sin\theta'),} \\
U_{2x,k'} = \operatorname{Sh}2\Phi = \dfrac{1}{k'}\operatorname{Sh}2\Phi' = \operatorname{tang}2\varphi, & u_{2x,k} = \mathrm{2in}\,2\varphi = \dfrac{1}{k}\sin 2\varphi' = \operatorname{Th}2\Phi, \\
V_{2x,k'} = \operatorname{Ch}2\Psi = \dfrac{1}{k'}\operatorname{Ch}2\Psi' = \sec 2\varphi' = \rho^2_{x,k}, & v_{2x,k} = \cos 2\psi = \dfrac{1}{k}\cos 2\psi' = \operatorname{Sech}2\Phi' = P^2_{x,k'}, \\
V^2_{x,k'} - U^2_{x,k'} = R^2 = 1 - \dfrac{k'^2}{4} R^4 \operatorname{Sh}^2 2\Phi, & v^2_{x,k} + u^2_{x,k} = r^2 = 1 + \dfrac{k'^2}{1} r^4 \sin^2 2\varphi, \\
U_{x,k'} = R\operatorname{Sh}\Phi, \qquad V_{x,k'} = R\operatorname{Ch}\Phi, & u_{x,k} = r\sin\varphi, \qquad v_{x,k} = r\cos\varphi, \\
\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{R'^2} = 1, & \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r'^2} = 1, \\
\dfrac{1}{R^2} - \dfrac{1}{R'^2} = \dfrac{1}{P^2} = \operatorname{Ch}2\Phi' = \sec 2\psi = \dfrac{1}{v_{2x,k}}, & \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r'^2} = \dfrac{1}{\rho^2} = \cos 2\varphi' = \operatorname{Sech}2\Psi = \dfrac{1}{V_{2x,k'}}, \\
R = \operatorname{Sech}\Phi', \qquad R' = i\operatorname{Cosech}\Phi', & r = \sec\varphi', \qquad r' = \operatorname{cosec}\varphi', \\
\multicolumn{2}{c}{P^2\,d\Phi = \operatorname{Sech}2\Phi'\,d\Phi = dx = \sec 2\varphi'\,d\varphi = \rho^2\,d\varphi.}
\end{array}
\right.
$$

Ce Tableau de formules parfaitement symétriques ([1]) montre que, à côté des *sinus* et *cosinus elliptiques* $u_{x,k}$, $v_{x,k}$, on pourra considérer des *sinus* et *cosinus hyperboliques* (mod k') $U_{x,k'}$, $V_{x,k'}$. Les fonctions elliptiques (mod k) s'expriment toutes par les fonctions elliptiques élémentaires (mod o), c'est-à-dire les fonctions circulaires, lorsqu'on introduit les angles ω, θ, 2φ, ..., appelés *amplitudes elliptiques;* de même, les fonctions hyperboliques (mod k') s'expriment toutes par les fonctions hyperboliques élémentaires (mod o), Sh, Ch, lorsqu'on introduit les secteurs hyperboliques Ω, Θ, 2Φ, ..., qu'on est ainsi conduit à appeler des *amplitudes hyperboliques*. Mais ici, nous rencontrons une expression employée depuis Houel dans un tout autre sens : lorsqu'on a affaire aux fonctions élémentaires $\operatorname{Sh} x$, $\operatorname{Ch} x$, le secteur hyperbolique ne se prêtant guère aux calculs, on remplace les variables précédentes par des lignes trigonométriques de l'angle introduit par Lambert sous le nom d'*angle transcendant,* et qui a été nommé depuis par Cayley *gudermanien,* et par Houel *amplitude hyperbolique* ([2]); cet angle, relativement à Ω et Θ dans nos formules, est, avec la notation de Cayley,

$$\omega = gd\Omega, \qquad \omega' = gd\Theta,$$

ou avec celle de Houel :

$$\omega = \operatorname{am} h\Omega, \qquad \omega' = \operatorname{am} h\Theta.$$

Cette dernière notation étant admise par un grand nombre de mathématiciens, nous ne pouvons nous l'approprier en lui donnant une autre signification. Nous

---

([1]) On remarquera les deux cas de dégénérescence : 1° $k = 0$, $k' = 1$; 2° $k = 1$, $k' = 0$.

([2]) LAISANT. *Fonctions hyperboliques* (*loc. cit.*).

nous permettrons cependant de montrer par les formules suivantes combien la notation $\omega = \mathrm{am}_e(x, k)$, $\Omega = \mathrm{am}_h(x, k')$ introduirait de symétrie, Ω portant le nom d'*amplitude hyperbolique de* x (mod k') comme ω porte le nom d'*amplitude elliptique de* x (mod k) :

$$
(60)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\Omega = \mathrm{am}_h(x, k'), & \Omega' = \mathrm{am}_h\left(k'x, \dfrac{1}{k'}\right), \\
\Theta = \mathrm{am}_h\left(kx, \dfrac{ik'}{k}\right), & \\
2\Phi = \mathrm{am}_h(2x, k'), & 2\Phi' = \mathrm{am}_h\left(2k'x, \dfrac{1}{k'}\right), \\
2\Psi = \mathrm{am}_h\left(2kx, \dfrac{ik'}{k}\right), & \\
\omega = \mathrm{am}_e(x, k), & \omega' = \mathrm{am}_e\left(kx, \dfrac{1}{k}\right), \\
\theta = \mathrm{am}_e\left(k'x, \dfrac{ik}{k'}\right), & \\
2\varphi = \mathrm{am}_e(2x, k), & 2\varphi' = \mathrm{am}_e\left(2kx, \dfrac{1}{k}\right), \\
2\psi = \mathrm{am}_e\left(2k'x, \dfrac{ik}{k'}\right) & \\
(\mathrm{Ch}\,\Theta' = \sin\theta'), & (\mathrm{Ch}\,2\Psi' = \sin 2\psi').
\end{array}
\right.
$$

Les angles réels θ', $2\psi'$, et les secteurs hyperboliques imaginaires Θ', $2\Psi'$ ne sont pas des amplitudes. A ces formules on pourra ajouter les relations suivantes :

$$
(61)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\omega = gd\,\Omega, \qquad \omega' = gd\,\Theta, \\
2\varphi = gd\,2\Phi, \qquad 2\varphi' = gd\,2\Psi, \qquad 2\psi = gd\,2\Phi'.
\end{array}
\right.
$$

Ajoutons que, si l'on employait cette expression d'*amplitude hyperbolique* dans le sens que nous indiquons, on pourrait dire que les amplitudes elliptiques ou hyperboliques sont destinées à exprimer au moyen des fonctions élémentaires (mod o), sin, cos, Sh, Ch, les fonctions elliptiques ou hyperboliques de modules différents de zéro, u, v, U, V, et il serait entendu que, sauf des cas tout spéciaux, *l'amplitude hyperbolique ne peut entrer que dans des formules relatives aux fonctions hyper-*

boliques U, V, *sous les signes* Sh, Ch, Th, *et que l'amplitude elliptique ne peut entrer que dans des formules relatives aux fonctions elliptiques u, v, sous les signes* sin, cos, tang, les relations entre les deux sortes d'amplitudes pouvant d'ailleurs toujours se mettre sous la forme (61).

Quoi qu'il en soit, l'usage ayant à peu près consacré l'expression d'*amplitude hyperbolique* dans le sens que lui a attribué Houël, nous n'insistons pas.

7. *Sur quelques transformations des fonctions hyperboliques de module k'.* — Les formules (60) suffisent à montrer quelles sont, à l'égard des fonctions U, V, les transformations VIII, X, et nous laissons au lecteur le soin d'exprimer les nouvelles fonctions UV au moyen des anciennes, calcul qu'on peut d'ailleurs faire directement sur les fonctions $u(ix, k') = i\mathrm{U}$, $v(ix, k') = \mathrm{V}$, dont les transformations seront facilement obtenues par l'échange de k et de k' dans toutes les transformations que nous avons données (I-XIII) au sujet des fonctions de module k.

L'une de ces transformations est particulièrement intéressante : c'est celle que l'on obtient en effectuant la transformation de Landen sur les fonctions $u(ix, k')$, $v(ix, k')$, ce qui donne la transformation XI des fonctions elliptiques de module k, ou la transformation suivante des fonctions U, V de module k' :

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{U}\left[(1 \pm k)x, \frac{1 \mp k}{1 \pm k}\right] \\ &\quad = (1 \pm k)\,\mathrm{U}(x, k')\,\mathrm{V}(x, k') = (1 \pm k)\,\mathrm{Sh}\,\Omega.\mathrm{Ch}\,\Theta, \end{aligned}\right.$$

ou, en vertu de la relation (58),

$$\mathrm{Th}\,\Theta = k\,\mathrm{Th}\,\Omega :$$

$$(63)\qquad \mathrm{U}\left[(1 \pm k)x, \frac{1 \mp k}{1 \pm k}\right] = \mathrm{Sh}(\Omega \pm \Theta).$$

La transformation XI des fonctions elliptiques $u_{x,k}$, $v_{x,k}$, n'est donc, à l'égard des fonctions hyperboliques $U_{x,k'}$, $V_{x,k'}$, qu'une transformation analogue à celle de Landen, ce qui était à prévoir, et se met sous une forme analogue à celle-ci [formule (25)] au moyen des fonctions élémentaires (mod o).

Posant

$$(64)\qquad \Omega_1 = \Omega + \Theta, \qquad \Omega'_1 = \Omega - \Theta, \qquad k'_1 = \frac{1-k}{1+k},$$

on aura

$$(65)\qquad U[(1+k)x, k'_1] = \operatorname{Sh}\Omega_1 = \frac{1}{k'_1}\operatorname{Sh}\Omega'_1$$

et

$$(66)\qquad V[(1+k)x, k'_1] = \operatorname{Ch}\Theta_1 = \frac{1}{k'_1}\operatorname{Ch}\Theta'_1 = \frac{\operatorname{Ch}\Omega_1}{\operatorname{Ch}\Omega'_1} \quad (^1).$$

Le retour inverse aux fonctions de module k', $U_{x,k'}$, $V_{x,k'}$ $\Big($c'est-à-dire relativement aux fonctions $u_{x,k}$, $v_{x,k}$, la transformation XII appliquée aux fonctions de module $\dfrac{1-k}{1+k}\Big)$ se fera par les formules

$$(67)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Omega_1 + \Omega'_1}{2} = \Omega, \\[2mm] \dfrac{\Omega_1 - \Omega'_1}{2} = \Theta. \end{cases}$$

La répétition de la transformation (62), $\left(k'_1 = \dfrac{1-k}{1+k}\right)$, donne au bout de n opérations [2] l'*amplitude hyper-*

---

[1] Comparer les formules (64), (65), (66) aux formules (28), (29), (30).

[2] Il faut bien remarquer que la répétition de la transformation (62) n'est pas la répétition de la transformation XI des fonctions $u(x, k)$, $v(x, k)$, mais est la répétition de la transformation de Landen des fonctions $u(ix, k') = i\mathrm{U}$, $v(ix, k') = \mathrm{V}$. Nous avons vu que la répétition de XI donne à nouveau le module k.

bolique (*voir* plus haut) Ω_n :

$$\Omega_n = \Omega + \Theta + \Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_{n-1}, \tag{68}$$

qui croît avec n au delà de toute limite comme l'argument lui-même ([1]).

Il n'en est pas de même de la transformation inverse qui, faite au moyen des formules (67) appliquées aux fonctions $U_{x,k'}$, $V_{x,k'}$ elles-mêmes, donne

$$(69)\left\{\begin{aligned} &\Omega_{(1)} = \frac{\Omega + \Omega'}{2}, \qquad \Theta_{(1)} = \frac{\Omega - \Omega'}{2}, \\ &U(x_{(1)}, k'_{(1)}) = \sqrt{\frac{1+k'}{2}}\sqrt{\frac{V-1}{1-k'V}} = \mathrm{Sh}\,\frac{\Omega+\Omega'}{2}, \\ &V(x_{(1)}, k'_{(1)}) = \sqrt{\frac{1+k'}{2}}\sqrt{\frac{1+V}{1+k'V}} = \mathrm{Ch}\,\frac{\Omega-\Omega'}{2}, \\ &\left[k'_{(1)} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},\ x_{(1)} = \frac{1+k'}{2}x,\ (1+k_{(1)})(1+k') = 2\right], \end{aligned}\right.$$

formules que l'on pourra comparer aux formules (41) et qui, si l'on double l'argument, donnent la transformation de Gauss (V) pour les fonctions hyperboliques U, V de module k' :

$$(70)\left\{\begin{aligned} &U[(1+k')x, k'_{(1)}] = \frac{1+k'}{1-k'U^2}U = \mathrm{Sh}(\Phi + \Phi'), \\ &V[(1+k')x, k'_{(1)}] = \frac{1+k'}{1+k'V^2}V = \mathrm{Ch}(\Phi - \Phi'). \end{aligned}\right.$$

analogues aux formules (51), (52).

Si l'on répète n fois la transformation (69), on a

$$x_{(n)} = \frac{(1+k')(1+k'_{(1)})\ldots(1+k'_{(n-1)})}{2^n}x = g_{(n)}x,$$

$$\left(k'_{(1)} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},\ k'_{(2)} = \frac{2\sqrt{k'_{(1)}}}{1+k'_{(1)}},\ \ldots\right);$$

([1]) Leurs rapports avec 2^n tendent vers une limite commune $\frac{\pi x}{2K'}$ et le module tend vers zéro.

$g_{(n)}$ que l'on peut écrire

$$(1+k_{(1)})(1+k_{(2)})\ldots(1+k_{(n)}),$$

tend vers $\frac{\pi}{2K}$ en croissant, en sorte que $x_{(n)}$ reste fini quel que soit n. Posant

$$U(x_{(n)}, k'_{(n)}) = U_{(n)}, \qquad V(x_{(n)}, k'_{(n)}) = V_{(n)},$$

on voit que, $k'_{(n)}$ tendant vers 1,

$$(71) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lim U_{(n)} = \frac{1}{i} \lim u(ix_{(n)}, k'_{(n)}) = \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2K}, \\ &\lim V_{(n)} = 1. \end{aligned} \right.$$

Si l'on écrit

$$\begin{aligned} (1+k')\,U(x,k') &= 2\,U_{(1)}V_{(1)}, \\ (1+k'_{(1)})\,U_{(1)} &= 2\,U_{(2)}V_{(2)}, \\ (1+k'_{(2)})\,U_{(2)} &= 2\,U_{(3)}V_{(3)}, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

on obtient, par n égalités de cette forme,

$$(72) \qquad U(x, k') = \frac{U(g_{(n)}x, k'_{(x)})}{g_{(n)}} V_{(1)}V_{(2)}\ldots V_{(n)},$$

et en faisant croître n indéfiniment

$$(73) \qquad \left\{ \begin{aligned} &U(x,k') = 2K \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi x}{2K}\right)}{\pi} V_{(1)}V_{(2)}\ldots V_{(n)}\ldots, \\ &\left[x_{(n)} = \frac{(1-k')(1+k'_{(1)})\ldots(1+k'_{(n-1)})}{2^n}\,x\right], \end{aligned} \right.$$

formule analogue à la suivante [1].

$$(74) \qquad \operatorname{Sh} x = x \operatorname{Ch} \frac{x}{2} \operatorname{Ch} \frac{x}{2^2} \operatorname{Ch} \frac{x}{2^3} \ldots,$$

---

[1] Les formules (49) et (74) concernant les fonctions circulaires ou hyperboliques élémentaires (mod o), et dont nous avons trouvé des analogues concernant les fonctions elliptiques u, v ou hyperboliques U, V (mod $\neq 0$) sont tirées de l'Ouvrage cité de M. Laisant (*Essai sur*...., 1874).

à laquelle elle se réduit lorsqu'on fait $k' = 0$, $(K = \infty)$.

La formule (73) est, pour les fonctions hyperboliques U, V (mod k'), ce qu'est la formule (48) pour les fonctions elliptiques u, v (mod k), comme la formule (74) est pour les fonctions hyperboliques élémentaires (mod o), ce qu'est la formule (49) pour les fonctions circulaires, c'est-à-dire les fonctions elliptiques élémentaires (mod o).

L'analogie des formules (73) et (74) est de la seconde sorte [*voir* la note (c)]. On obtient une analogue directe de la formule (74) en multipliant membre à membre n égalités de la forme suivante (duplication de l'argument) :

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{U}\left(\frac{x}{2^{p-1}}, k'\right) = \frac{2\,\mathrm{U}\left(\frac{x}{2^p}, k'\right)\mathrm{V}\left(\frac{x}{2^p}, k'\right)}{\mathrm{V}^2\left(\frac{x}{2^p}, k'\right) - \mathrm{U}^2\left(\frac{x}{2^p}, k'\right)} \\ &(p = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right.$$

puis faisant croître n indéfiniment; on a ainsi, comme dans le cas des fonctions u, v (50) :

$$(76)\quad \mathrm{U}(x, k') = x\,\frac{\mathrm{V}\left(\frac{x}{2}, k'\right)\mathrm{V}\left(\frac{x}{2^2}, k'\right)\mathrm{V}\left(\frac{x}{2^3}, k'\right)\cdots}{\prod_1^\infty\left[\mathrm{V}^2\left(\frac{x}{2^p}, k'\right) - \mathrm{U}^2\left(\frac{x}{2^p}, k'\right)\right]}.$$

Dans le présent Mémoire, nous avons donné quelques propriétés, analytiques ou géométriques, des fonctions $u = \mathrm{sn}\,x$, $v = \mathrm{sn}(x + \mathrm{K})$ et des fonctions hyperboliques qui en dérivent par la considération d'un argument purement imaginaire ([1]); on nous permettra de conclure,

---

([1]) Le lecteur est prié d'écrire lui-même les formules concernant $u(x, k')$, $v(x, k')$, pour passer directement à $\mathrm{U} = \dfrac{u(ix, k')}{i}$, $\mathrm{V} = v(ix, k')$.

comme dans notre première Note sur ces fonctions parue en 1898 dans ce Journal : *les fonctions*

$$u = \mathrm{sn}(x, k), \qquad v = \mathrm{sn}(x + \mathrm{K}, k)$$

sont, par leurs propriétés corrélatives, les analogues des fonctions $\sin x$, $\cos x$.