VOGT

# Théorème relatif aux mineurs d'un déterminant

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 1 (1901), p. 211-214

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__211_0>

[B1a]

# THÉORÈME RELATIF AUX MINEURS D'UN DÉTERMINANT;

Par M. VOGT,
Professeur à l'Université de Nancy.

---

M. Netto a démontré (*Acta mathematica*, t. XVII, et *Journal de Crelle*, t. 114) plusieurs théorèmes relatifs aux mineurs d'un déterminant; l'un d'entre eux en particulier est susceptible d'applications à la théorie des formes binaires; je me propose de donner de ce théorème une démonstration plus élémentaire que celle de M. Netto.

Soit

$$D = |a_i^j| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

un déterminant d'ordre $n$ dont les éléments ne sont soumis à aucune restriction, et soit $d$ un de ses mineurs d'ordre $q$; D et $d$ sont différents de zéro; pour simplifier nous supposerons que les éléments de $d$ sont contenus dans les $q$ premières lignes et les $q$ premières colonnes de D, c'est-à-dire que l'on a

$$d = |a_i^j| \qquad (i.j = 1, 2, \ldots, q < n).$$

Désignons par $A_r^s$ le mineur du déterminant D obtenu en bordant $d$ par les éléments de la $r^{\text{ième}}$ et de la $s^{\text{ième}}$ colonne, c'est-à-dire

$$A_r^s = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^q & a_1^s \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^q & a_2^s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_q^1 & a_q^2 & \ldots & a_q^q & a_q^s \\ a_r^1 & a_r^2 & \ldots & a_r^q & a_r^s \end{vmatrix};$$

les mineurs $A_r^s$, pour $r$ et $s$ variant de $q+1$ à $n$, sont les éléments d'un déterminant d'ordre $n-q$ que nous désignons par

$$\Delta = | A_r^s | \qquad (r, s = q+1, \ldots, n).$$

Nous nous proposons d'évaluer le déterminant $\Delta$ au moyen de D et de $d$, et les mineurs du premier ordre de $\Delta$ au moyen de $d$ et des mineurs du premier ordre de D.

Considérons le système suivant de $n$ équations linéaires à $n$ inconnues :

$$\begin{array}{l} a_1^1 \quad x_1 + a_1^2 \quad x_2 + \ldots + a_1^n \quad x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_q^1 \quad x_1 + a_q^2 \quad x_2 + \ldots + a_q^n \quad x_n = 0, \\ a_{q+1}^1 x_1 + a_{q+1}^2 x_2 + \ldots + a_{q+1}^n x_n = u_{q+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n^1 \quad x_1 + a_n^2 \quad x_2 + \ldots + a_n^n \quad x_n = u_n, \end{array}$$

les seconds membres des $q$ premières étant nuls, et ceux des suivantes étant des quantités arbitraires $u_{p+1}, \ldots, u_n$; nous allons évaluer les valeurs des inconnues $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_n$ satisfaisant à ces équations; comme le déterminant D n'est pas nul, nous avons en général

$$(1) \quad x_s = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial D}{\partial a_{q+1}^s} u_{q+1} + \frac{\partial D}{\partial A_{q+2}^s} u_{q+2} + \ldots + \frac{\partial D}{\partial a_n^s} u_n\right).$$

Nous pouvons encore résoudre le système précédent d'équations en éliminant d'abord $x_1, x_2, \ldots, x_q$ entre les $q$ premières et chacune des suivantes, puis tirant $x_{q+1}, \ldots, x_n$ des équations ainsi formées. L'élimination des $q$ premières inconnues entre les $q$ premières équations et celle de rang $r$ donne

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^q & a_1^{q+1} x_{q+1} + \ldots + a_1^n x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_q^1 & a_q^2 & \ldots & a_q^q & a_q^{q+1} x_{q+1} + \ldots + a_q^n x_n \\ a_r^1 & a_r^2 & \ldots & a_r^q & a_r^{q+1} x_{q+1} + \ldots + a_r^n x_n - u_r \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$A_r^{q+1} x_{q+1} + A_r^{q+2} x_{q+2} + \ldots + A_r^n x_n = du_r.$$

En donnant à $r$ les valeurs $q+1, q+2, \ldots, n$, on a $n-q$ équations linéaires, dont la solution est donnée par la formule générale

$$(2)\qquad x_s = \frac{d}{\Delta}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial A_{q+1}^s} u_{q+1} + \frac{\partial\Delta}{\partial A_{q+2}^s} u_{q+2} + \ldots + \frac{\partial\Delta}{\partial A_n^s} u_n\right);$$

les valeurs (1) et (2) des inconnues d'indice supérieur à $q$, fournies par les deux méthodes, doivent être les mêmes, et comme cela a lieu quelles que soient les valeurs attribuées aux indéterminées $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_n$, il faut que ces indéterminées aient les mêmes coefficients : on déduit de là la relation générale

$$(3)\qquad \frac{d}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial A_r^s} = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial a_r^s}.$$

Considérons maintenant les deux déterminants dont les éléments sont les deux membres de l'équation précédente lorsque $r$ et $s$ varient de $q+1$ à $n$, et écrivons qu'ils sont égaux; nous avons

$$\frac{d^{n-q}}{\Delta^{n-q}}\left|\frac{\partial\Delta}{\partial A_r^s}\right| = \frac{1}{D^{n-q}}\left|\frac{\partial D}{\partial a_r^s}\right|,$$

mais d'après les théorèmes connus sur les mineurs du premier ordre d'un déterminant, nous avons

$$\left|\frac{\partial\Delta}{\partial A_r^s}\right| = \Delta^{n-q-1}, \qquad \left|\frac{\partial D}{\partial a_r^s}\right| = D^{n-q-1}\, d;$$

en remplaçant ces déterminants par leurs valeurs, nous en déduisons la relation fondamentale

$$(4)\qquad \Delta = D\, d^{n-q-1};$$

la formule (3) donne ensuite

$$(5)\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial A_r^s} = d^{n-q-2}\,\frac{\partial D}{\partial a_r^s}.$$

Les égalités (4) et (5) constituent le théorème que nous voulions démontrer; elles sont établies en supposant que D et $d$ ne sont pas nuls; comme ce sont des identités dont les deux membres sont des fonctions entières des éléments $a_i^j$, elles ont encore lieu lorsque ces éléments prennent des valeurs particulières pour lesquelles D ou $d$ sont nuls; elles sont par suite générales.