NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. FABRY

Sur une propriété de la fonction ζ

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 205-210

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__205_0>

[F2e]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION ζ;

PAR M. E. FABRY.

Considérons la fonction ζ de Weierstrass, définie par la série

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

où $w = 2m\omega + 2n\omega'$, m et n prenant toutes les valeurs entières positives et négatives, y compris zéro, sauf le système $m = n = 0$.

Soit

$$\delta = \omega'\zeta(\omega) - \omega\zeta(\omega'):$$

on sait que $\delta = \pm \frac{\pi i}{2}$, le signe étant celui du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$. Cette relation peut se déduire des propriétés du développement de $\zeta(u) - \frac{u}{\omega}\zeta(\omega)$ en série trigonométrique. Je vais montrer qu'on peut l'obtenir directement par la sommation des séries qui définissent δ

On a

$$\delta = \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega}{\omega'} + \sum{}' \left(\frac{\omega'}{\omega - w} - \frac{\omega}{\omega' - w} + \frac{\omega' - \omega}{w} \right).$$

Supposons que m varie de $-M$ à $+M$, et n de $-N$ à $+N$. Dans l'expression

$$\omega - w = -2n\omega' + (1 - 2m)\omega,$$

$1 - 2m$ prend les valeurs impaires de $1 - 2M$ à $1 + 2M$ et $2n$ les valeurs paires de $-2N$ à $+2N$. Les termes sont deux à deux égaux et de signes contraires, sauf les termes $-2n\omega' + (1 + 2M)\omega$, et le terme $-\omega$, car pour $m = n = 0$, le terme $+\omega$ est supprimé; donc les termes de $\sum' \frac{\omega'}{\omega - w}$ se réduisent à

$$-\frac{\omega'}{\omega} + \sum_{n=-N}^{+N} \frac{\omega'}{(2M+1)\omega - 2n\omega'}.$$

De même, dans $\sum' \frac{-\omega}{\omega' - w}$, les termes se détruisent deux à deux, et il reste

$$\frac{\omega}{\omega'} - \sum_{m=-M}^{+M} \frac{\omega}{(2N+1)\omega' - 2m\omega}.$$

Les termes de $\sum' \frac{1}{w}$ disparaissent tous.

δ sera donc égal à la limite, lorsque M et N deviennent infinis, de l'expression

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega'}{(2M+1)\omega - 2n\omega'} - \sum_{-M}^{+M} \frac{\omega}{(2N+1)\omega' - 2m\omega}.$$

Cette limite est la même que celle de l'expression

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega'}{2(M\omega - n\omega')} - \sum_{-M}^{+M} \frac{\omega}{2(N\omega' - m\omega)},$$

car leur différence est

$$-\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega\omega'}{[(2M-1)\omega - 2n\omega'](2M\omega - 2n\omega')}$$
$$+\sum_{-M}^{+M} \frac{\omega\omega'}{[(2N+1)\omega' - 2m\omega](2N\omega' - 2m\omega)}.$$

Soient ρ le module de ω, ρ' celui de ω', θ l'argument de $\frac{\omega'}{\omega}$. On a

$$\begin{aligned}|m\omega+n\omega'|^2 &= m^2\rho^2+n^2\rho'^2+2mn\rho\rho'\cos\theta\\ &= (1-\cos\theta)(m^2\rho^2+n^2\rho'^2)+\cos\theta(m\rho+n\rho')^2\\ &= (1+\cos\theta)(m^2\rho^2+n^2\rho'^2)-\cos\theta(m\rho-n\rho')^2,\end{aligned}$$

et, quel que soit le signe de $\cos\theta$,

$$|m\omega+n\omega'|^2 > (m^2\rho^2+n^2\rho'^2)[1-|\cos\theta|].$$

$\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega\omega'}{[(2M+1)\omega-2n\omega')](2M\omega-2n\omega')}$ a donc un module plus petit que

$$\frac{\rho\rho'}{1-|\cos\theta|}\sum_{-N}^{+N}\frac{1}{4(M^2\rho^2+n^2\rho'^2)};$$

or

$$\begin{aligned}&\sum_{-N}^{+N}\frac{1}{M^2\rho^2+n^2\rho'^2}\\ &= \frac{1}{M^2\rho^2}+2\sum_{1}^{N}\frac{1}{M^2\rho^2+n^2\rho'^2} < \frac{1}{M^2\rho^2}+2\int_0^\infty\frac{dr}{M^2\rho^2+x^2\rho'^2}\\ &= \frac{1}{M^2\rho^2}+\frac{\pi}{M\rho\rho'},\end{aligned}$$

qui tend vers zéro, lorsque M devient infini. Le même résultat s'applique au second terme, qui a une forme symétrique.

Donc 2δ est égal à la limite de

$$\sum_{-N}^{+N}\frac{\omega'}{M\omega-n\omega'}-\sum_{-M}^{+M}\frac{\omega}{N\omega'-m\omega}.$$

Ces sommes peuvent se remplacer par des intégrales définies. Considérons, en effet, la somme

$$\sum_{-N}^{+N}\frac{1}{n+a+bi}=\sum_{-N}^{+N}\frac{n+a-bi}{(n+a)^2+b^2},$$

et supposons $2b > 1$. $\frac{x}{x^2+b^2}$ croît avec x, si x est compris entre $-b$ et $+b$, et décroît dans les autres cas. On a donc

$$\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} < \int_n^{n+1} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\,dx,$$

si $n+a$ est compris entre $-b$ et $b-1$, et

$$\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} < \int_{n-1}^{n} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\,dx,$$

si $n+a$ est compris entre $-\infty$ et $-b$ ou entre $b+1$ et $+\infty$. En outre, si $n+a$ est compris entre $b-1$ et b, le plus petit des deux termes $\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2}$, $\frac{n+a+1}{(n+a)^2+b^2}$ est plus petit que $\int_n^{n+1} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\,dx$, si l'on suppose $b-1 > -b$, ou $b > \frac{1}{2}$.

Il en résulte que l'on a, quel que soit a,

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} < \frac{1}{b} + \int_{-N}^{+N} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{b} + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2}.$$

On obtient, de la même manière, l'inégalité

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} > -\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2}.$$

Si b augmente indéfiniment, avec N

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2}$$

tend vers zéro.

De même, $\frac{b}{x^2+b^2}$, où $b > 0$, a un seul maximum, pour $x = 0$. On en déduit, quel que soit a,

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{b}{(n+a)^2+b^2} < \frac{1}{b} + \int_{-N}^{+N} \frac{b\,dx}{(x+a)^2+b^2},$$

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{b}{(n+a)^2+b^2} > -\frac{1}{b} + \int_{-N}^{+N} \frac{b\,dx}{(x+a)^2+b^2}$$

$$= -\frac{1}{b} - \text{arc tang}\,\frac{b}{N+a} + \text{arc tang}\,\frac{b}{a-N},$$

où les arcs sont compris entre o et π, afin que arc tang $\frac{b}{x}$ varie d'une façon continue lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

N étant positif, on a, quel que soit a,

$$\text{arc tang}\,\frac{b}{N+a} < \text{arc tang}\,\frac{b}{a-N}$$

et

$$\text{arc tang}\,\frac{b}{N+a} - \text{arc tang}\,\frac{b}{a-N} = -\,\text{arc tang}\,\frac{2Nb}{a^2+b^2-N^2},$$

ces trois arcs étant compris entre o et π.

Si b augmente indéfiniment, $\sum_{-N}^{+N} \frac{1}{n-a+bi}$ a la même limite que

$$\frac{1}{2} L \frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2} + i\left(\text{arc tang}\,\frac{b}{N+a} - \text{arc tang}\,\frac{b}{a-N}\right)$$

$$= L(N+a+bi) - L(a-N+bi)$$

$$= L\left(\frac{a+N+bi}{a-N+bi}\right),$$

où L désigne la valeur du logarithme, dont le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et π. Pour les deux premiers, ce coefficient est positif; pour le dernier, il est compris entre o et $-\pi$.

Si α est une quantité imaginaire, dont le coefficient de i tend vers $+\infty$, en même temps que le nombre entier N,

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{1}{n+\alpha} - L\frac{\alpha+N}{\alpha-N}$$

tend vers zéro, ce logarithme ayant le coefficient de i compris entre o et $-\pi$.

Si $\frac{\omega'}{\omega}$ et, par suite, $\frac{-\omega}{\omega'}$ ont le coefficient de i positif, on a

$$2\delta = \text{Lim} - \sum_{-N}^{+N} \frac{1}{n - M\frac{\omega}{\omega'}} - \sum_{-M}^{+M} \frac{1}{m + N\frac{\omega'}{\omega}},$$

la limite est la même que celle de

$$-L\frac{-M\frac{\omega}{\omega'}+N}{-M\frac{\omega}{\omega'}-N} - L\frac{N\frac{\omega'}{\omega}+M}{N\frac{\omega'}{\omega}-M}$$

ou

$$-L\frac{M\omega - N\omega'}{M\omega + N\omega'} - L\frac{M\omega + N\omega'}{N\omega' - M\omega} = -L(-1).$$

Si l'on pose

$$L\frac{M\omega - N\omega'}{M\omega + N\omega'} = a + bi,$$

on aura

$$L\frac{M\omega + N\omega'}{N\omega' - M\omega} = -a - (\pi + b)i,$$

car b et $\pi - b$ doivent être compris entre o et $-\pi$, et $L(-1)$ représente ici la valeur $-\pi i$. On a donc

$$\delta = \frac{\pi i}{2}.$$

Si le coefficient de i, dans $\frac{\omega'}{\omega}$, était négatif, il est clair que l'on devrait changer les signes des logarithmes et, par suite, de δ.