E.-M. LÉMERAY

Sur les fonctions numériques et la symétrie abélienne

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 163-167

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__163_1>

[H11] [I11]

SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES ET LA SYMÉTRIE ABÉLIENNE;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

Étant donnés une fonction f et un entier

$$m = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots,$$

on sait que, si l'on définit une fonction $F(m)$ *par la relation*

$$F(m) = \sum f(d),$$

où la somme s'étend à tous les diviseurs de m, *on a inversement*

$$(1)\quad \begin{cases} f(m) = F(m) + \sum f\left(\dfrac{m}{pq}\right) + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad - \left[\sum f\left(\dfrac{m}{p}\right) + \sum f\left(\dfrac{m}{pqr}\right) + \ldots\right]. \end{cases}$$

Il est possible de généraliser ce théorème quand on définit $F(m)$ non plus par une somme, mais par une fonction des $f(d)$ possédant la symétrie abélienne. Par définition, une fonction $\Psi_2(a_1, a_2)$ possède la symétrie abélienne lorsque :

(A) Elle ne change pas quand on permute a_1 et a_2;

(B) $\Psi_2[a_1, \Psi_2(a_2, a_3)]$, que nous désignerons par $\Psi_3(a_1, a_2, a_3)$, ne change pas quand on permute a_1, a_2 et a_3.

En continuant ainsi l'on forme une suite de fonctions par la loi

$$\begin{aligned}&\Psi_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_{\lambda-2}, a_{\lambda-1}, a_\lambda)\\ &\quad = \Psi_{\lambda-1}[a_1, a_2, \ldots, a_{\lambda-2}, \Psi_2(a_{\lambda-1}, a_\lambda)].\end{aligned}$$

Chacune des fonctions est symétrique par rapport aux 2, 3, ..., λ variables dont elle dépend. D'autre part, représentons par

$$v = \Omega(y, u)$$

la résolution de l'équation

$$y = \Psi_2(u, v),$$

par rapport à v. Le théorème que nous nous proposons de démontrer peut alors s'énoncer ainsi :

Si d_1, d_2, ..., d_λ sont les diviseurs de m, et si l'on définit $F(m)$ par la relation

$$F(m) = \Psi_\lambda[f(d_1), f(d_2), \ldots, f(d_\lambda)], \tag{2}$$

on aura inversement

$$f(m) = \Omega(G, H), \tag{3}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} G &= \Psi_\mu\left[F(m),\ F\left(\frac{m}{pq}\right), \ldots\ldots, F\left(\frac{m}{pqrs}\right)\right],\\ H &= \Psi_\nu\left[F\left(\frac{m}{p}\right), \ldots\ldots, F\left(\frac{m}{pqr}\right), \ldots\ldots\right].\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Les indices μ et ν, qui indiquent le nombre des variables dont dépendent respectivement G *et* H, *sont* *égaux : le premier à l'unité augmentée du nombre des diviseurs de m qui contiennent un nombre pair de facteurs premiers* DISTINCTS ; *le second au nombre des diviseurs de m qui en contiennent un nombre impair; μ et ν seront égaux, comme on sait.*

Pour démontrer cette proposition, rappelons que, d'après Abel, les conditions (A) et (B) sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction Φ admettant Ψ_2 pour théorème d'addition, c'est-à-dire telle que, si l'on pose

$$a_i = \Phi(x_i), \tag{5}$$

on a

$$\Phi(x_1 + x_2) = \Psi_2(a_1, a_2).$$

Alors, en général, on aura

$$\Phi(x_1 + x_2 + \ldots + x_\lambda) = \Psi_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_\lambda).$$

De plus, si l'on pose

$$y = \Psi_2(u, v) = \Phi(x_j), \qquad u = \Phi(x_k),$$

la fonction

$$v = \Omega(y, u)$$

n'est autre que

$$\Phi(x_j - x_k).$$

Enfin, si l'on représente par Φ_{-1} la fonction inverse de Φ, de l'équation (5), on tire

$$x_i = \Phi_{-1}(a_i).$$

Il résulte de là que, en faisant $a_i = f(d_i)$, en introduisant dans (2) et (4) la fonction Φ au lieu des fonctions Ψ et en substituant dans (3), on est ramené à démontrer que, si l'on définit $F(m)$ par la relation

$$F(m) = \Phi\left\{\sum \Phi_{-1}[f(d)]\right\}, \tag{6}$$

on aura inversement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} f(m) = \Phi\Big\{ & \sum \Phi_{-1}[F(m)] + \sum \Phi_{-1}\left[F\left(\frac{m}{pq}\right)\right] + \ldots \\ & - \sum \Phi_{-1}\left[F\left(\frac{m}{p}\right)\right] - \sum \Phi_{-1}\left[F\left(\frac{m}{pqr}\right)\right] - \ldots \Big\}. \end{aligned}\right.$$

La démonstration est maintenant immédiate, car les équations (6) et (7) peuvent s'écrire

$$(6')\qquad \Phi_{-1}[F(m)] = \sum \Phi_{-1}[f(d)],$$

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_{-1}[f(m)] = & \sum \Phi_{-1}[F(m)] + \ldots \\ & - \sum \Phi_{-1}\left[F\left(\frac{m}{p}\right)\right] - \ldots, \end{aligned}\right.$$

de sorte que, si l'on pose

$$\Phi_{-1}[F(m)] = F'(m), \qquad \Phi_{-1}[f(m)] = f'(m),$$

on est ramené à une relation de même forme que (1).

Il faut remarquer que Ψ_2 et Ω peuvent avoir plusieurs déterminations; nous supposons, bien entendu, que lorsqu'on a choisi une détermination de Ψ_2, celle qu'il convient de prendre pour Ω est par là même déterminée.

Exemple. — Soit la fonction symétrique

$$\Psi_2(a_1, a_2) = a_1\sqrt{1 + a_2^2} + a_2\sqrt{1 + a_1^2} \quad [1];$$

on trouve

$$\Psi_3(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3 + \sum a_1\sqrt{1 + a_2^2}\sqrt{1 + a_3^2},$$

symétrique en a_1, a_2, a_3; Ψ_2 possède donc la symétrie

---

[1] Elle représente le théorème d'addition de la fonction hyperbolique $\mathrm{Sh}\,x$, qui n'intervient pas d'ailleurs dans le calcul.

abélienne; on trouve ensuite

$$\Psi_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum a_1 a_2 a_3 \sqrt{1+a_4^2} + \sum a_1 \sqrt{1+a_2^2}\sqrt{1+a_3^2}\sqrt{1+a_4^2},$$

. . . .

Prenons pour $f(m)$ la fonction numérique fondamentale $\varphi(m)$ et supposons $m = 6 = 2.3$. Ses diviseurs sont 1, 2, 3, 6 et l'on a

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(2) = 1, \qquad \varphi(3) = 2, \qquad \varphi(6) = 2.$$

En remplaçant les a par les $\varphi(d)$ et tenant compte de (2), on a

$$F(6) = \Psi_4(1, 1, 2, 2) = 12\sqrt{5} + 18\sqrt{2}, \qquad F\left(\frac{6}{2.3}\right) = 1,$$

$$F\left(\frac{6}{2}\right) = \Psi_2(1, 2) = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}, \qquad F\left(\frac{6}{3}\right) = \Psi_2(1, 1) = 2\sqrt{2}.$$

En tenant compte des équations (4), on a ensuite

$$G = \Psi_2\left[F(6),\ F\left(\frac{6}{2.3}\right)\right] = 63 + 20\sqrt{10},$$

$$H = \Psi_2\left[F\left(\frac{6}{3}\right),\ F\left(\frac{6}{2}\right)\right] = 7\sqrt{5} + 10\sqrt{2}.$$

D'autre part, de

$$y = \Psi_2(u, v) = u\sqrt{1+v^2} + v\sqrt{1+u^2},$$

on tire

$$v = \Omega(y, u) = y\sqrt{1+u^2} - u\sqrt{1+y^2},$$

et l'on vérifie que

$$\varphi(6) = \Omega(G, H) = G\sqrt{1+H^2} - H\sqrt{1+G^2} = 2.$$