NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES MONNET

Sur les caustiques par réflexion

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 120-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__120_1>

[O2qβ]

SUR LES CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION;

PAR M. GEORGES MONNET,
Élève à l'École Centrale.

Dans ce qui suit nous ne considérerons que des rayons lumineux situés dans un même plan.

THÉORÈME DE MALUS.

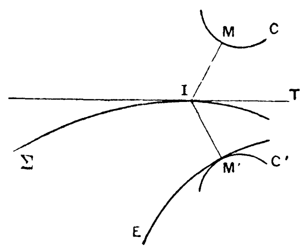
Les rayons normaux à une courbe C *et réfléchis par une courbe* Σ *ont pour anticaustique la courbe* E *telle que* $IM' = IM$.

En effet : Si une droite réfléchissante tourne autour d'un de ses points l'image d'une courbe donnée C tourne aussi autour de ce point : c'est une conséquence immédiate de la symétrie de C et de son image.

Soit donc une pareille droite roulant sur une courbe Σ, l'image réfléchie se déplace aussi et son centre instantané de rotation est à chaque instant le même que celui de la droite, c'est-à-dire le point de contact I.

Un rayon incident normal à C de M (*fig.* 1) se réflé-

Fig. 1.



chit suivant IM' normal à C' en M', par symétrie ; I étant le centre instantané il en résulte, d'après un théorème connu, que M' est un point de l'enveloppe de C'. Or IM' normale à C' est aussi normale à son enveloppe E qui devient ainsi l'anticaustique cherchée, et l'on a bien

$$IM = IM'.$$

Roulette correspondant au déplacement de l'image C'.

Le lieu du centre instantané étant la courbe Σ cette courbe est la base.

Cherchons la roulette : Soient R' son rayon de courbure en I, R celui de Σ. Lorsque le miroir tourne de l'angle $d\alpha$ on sait que l'image tourne de $2\,d\alpha$. Le miroir roulant sur Σ, on peut lui appliquer la formule de Savary et écrire

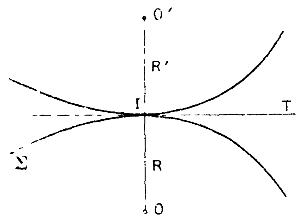
$$d\alpha = ds\,\frac{1}{R},$$

de même pour l'image

$$2\,d\alpha = ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right),$$

donc $R = R'$, et d'après le sens dans lequel doivent être comptés ces rayons de courbure (*fig.* 2), cette égalité

Fig. 2.



montre que la roulette est la symétrique de la base relativement à une tangente quelconque.

On peut arriver au même résultat sans formules de la façon suivante : Soient B la base, R la roulette ; le mouvement de l'image peut être regardé comme produit par B roulant sur sa tangente qui elle-même roulerait sur la base de façon que les deux points de contact coïncident toujours ; dans ces conditions si nous rendons mobile le plan de la figure de façon que la tangente reste fixe, les mouvements relatifs n'étant pas changés, R et B rouleront simultanément sur la tangente ; or les courbes C et C' entraînées par B et R étant toujours symétriques par rapport à la tangente il faut aussi que R et B le soient.

Centre de courbure de l'anticaustique.

Soit ω le centre de courbure de la courbe C en M ; son symétrique ω' est le centre en M' de la courbe C'.

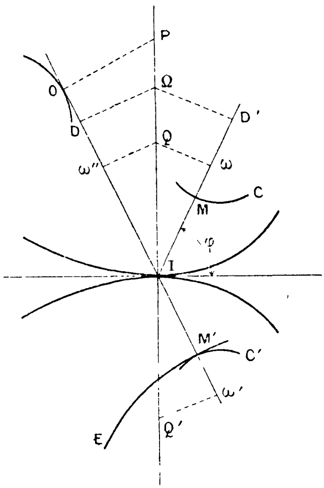
En désignant par O le centre de courbure de l'anticaustique E, on a d'après la formule de Savary

$$\frac{1}{\mathrm{I}\omega'} + \frac{1}{\omega'\mathrm{O} - \omega'\mathrm{I}} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}}\right) \qquad (\mathrm{R} = \mathrm{I}\Omega),$$

(1) $$\frac{1}{\mathrm{I}\omega'} + \frac{1}{\mathrm{IO}} = \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{2}{\mathrm{R}}.$$

Cette formule suppose les segments I'ω et IO comptés positivement à partir de I et dans deux sens opposés (*fig.* 3); de même pour R, mais les deux centres de B

Fig. 3.



et R étant toujours symétriques le deuxième membre est toujours positif.

Conservant l'origine I, prenons un sens unique sur la droite Oω; il vient, en supposant IO positif,

$$\frac{1}{\mathrm{IO}} - \frac{1}{\mathrm{I}\omega'} = \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{2}{\mathrm{R}},$$

et si nous projetons le segment $I\Omega = R$ en ID

$$\frac{1}{\overline{IO}} - \frac{1}{\overline{I\omega'}} = \frac{2}{\overline{ID}}.$$

Envisagée au point de vue métrique cette formule nous donne, en posant

$$I\omega' = I\omega = a, \qquad IO = b, \qquad ID' = ID = \frac{p}{2},$$

(2) $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

Soit $I\omega'' = I\omega' = I\omega$ en valeur absolue, on a

$$\overline{I\omega''} = -\overline{I\omega'},$$

donc

(3) $$\frac{1}{\overline{IO}} + \frac{1}{\overline{I\omega''}} = \frac{2}{\overline{ID}},$$

et qui montre que I et D sont conjugués harmoniques par rapport à O et ω''.

Considérons les points P et Q de la normale NN′ qui se projetteraient en O et ω'', on a

$$\overline{IO} = \overline{IP}\sin\varphi,$$
$$\overline{I\omega'} = -\overline{I\omega''} = -\overline{IQ}\sin\varphi,$$

en portant dans la formule de Savary

(4) $$\frac{1}{\overline{IP}} + \frac{1}{\overline{IQ}} = \frac{2}{\overline{I\Omega}}.$$

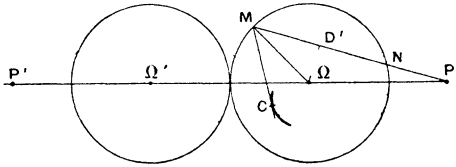
Donc P et Q sont conjugués harmoniques par rapport au point d'incidence I et au centre de courbure Ω.

Application aux miroirs sphériques.

Rayons issus d'un point lumineux. — Dans ce cas la surface caustique étant de révolution il suffit de considérer une section plane.

Point lumineux à distance finie. — Les courbes C et C′ se réduisent à des points PP′ et l'anticaustique sera engendrée par le point P′ (*fig.* 4) entraîné par le

Fig. 4.



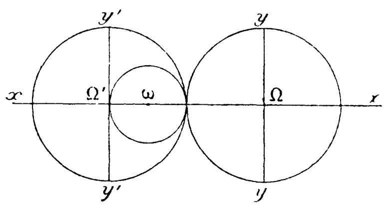
cercle Ω′ roulant sur son égal Ω.

Les points P et P′ étant toujours symétriques par rapport à la tangente commune aux deux cercles on en conclut d'après un théorème connu que P′ décrit un limaçon de Pascal. Enfin la formule (2) donne la relation classique

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{MC} = \frac{1}{MN}.$$

Point lumineux à l'infini. — Supposons le point à l'infini sur l'axe xx (*fig.* 5) les rayons peuvent être

Fig. 5.



considérés comme normaux à la droite y perpendiculaire à l'axe et l'anticaustique correspondante sera l'enveloppe de la droite y' quand le cercle Ω′ roulera sur Ω.

On sait que cette enveloppe est l'épicycloïde décrite par un cercle ω de rayon moitié de celui de Ω et roulant sur l'extérieur de ce cercle.

D'après un théorème connu la caustique qui est la développée de cette épicycloïde est une courbe du même genre. Ce théorème peut s'établir géométriquement de la façon suivante :

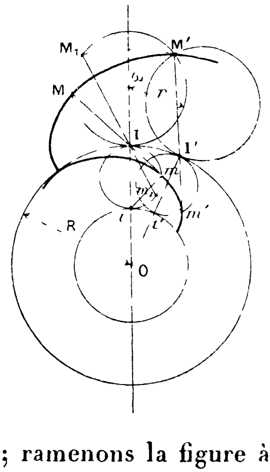
Soit le cercle ω *de rayon* r *roulant sur le cercle* O *de rayon* R, *le point* M *du cercle* ω *décrit une épicycloïde ayant pour normale en* M *la droite* MI. *Considérons sur* OI *le point* i *tel qu'on ait*

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{O}i}{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{I}i}{2r} = \lambda,$$

et soient les cercles de diamètre Ii *et de rayon* Oi; *la droite* MI *rencontre le cercle* Ii *au point* m; *nous allons démontrer que si ce cercle roule sur le cercle* Oi *en entraînant* m *les trois points* M, I, m *sont toujours en ligne droite.*

En effet, soit le rayon Ii venu en I$'i'$ (*fig.* 6), M vient

Fig. 6.



en M$'$, m en m'; ramenons la figure à sa position initiale par une simple rotation autour de O, M$'$ vient en M$_1$

et m' en m_1 et l'on a

$$\text{arc}\,\text{MM}_1 = \text{arc}\,\text{II}', \qquad \text{arc}\,mm_1 = \text{arc}\,ii'.$$

Mais comme

$$\text{arc}\,\text{II}' = \lambda\,\text{arc}\,ii',$$

il en résulte

$$\text{arc}\,\text{MM}_1 = \lambda\,\text{arc}\,mm_1.$$

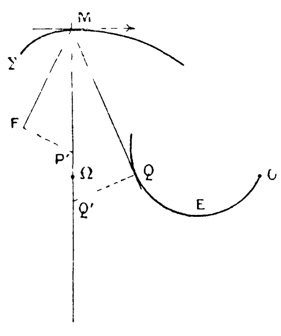
Or, les cercles ω et Ii d'après la condition (1) sont homothétiques et de rapport λ par rapport au point I; il en résulte que m' est bien sur la droite MI; ceci étant vrai pour la position Ii est vrai pour la position I$'i'$. D'autre part Im et im dans le cercle Ii sont perpendiculaires, mi étant normale à l'épicycloïde décrite par m, MmI lui est tangente, ce qui démontre le théorème.

Application des formules a la détermination de certains rayons de courbure.

Les formules précédentes qui lient les trois rayons de courbure de la courbe C, de la courbe Σ et de l'anticaustique E permettent de déterminer l'un d'eux connaissant les autres.

Soient un point F et une courbe E (*fig.* 7); considérons la courbe Σ telle qu'on ait

Fig. 7.



$$\text{MF} \mp \text{MQ} = \text{arc}\,\text{OQ} + \text{const}.$$

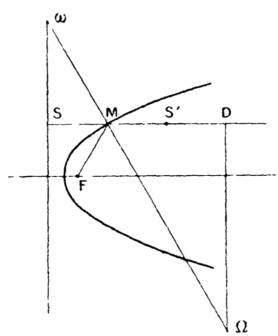
La méthode des tangentes de Roberval permet de voir immédiatement que la tangente est bissectrice des rayons vecteurs et que par conséquent un rayon issu de F, par exemple FM, se réfléchira suivant MQ. La courbe E est donc la caustique et si nous menons la perpendiculaire à FM en F, à MQ en Q, elles rencontrent la normale en I en deux points P′ et Q′ tels que le centre de courbure Ω de Σ est conjugué harmonique de M par rapport à ces points.

Ellipse ou hyperbole. — L'ellipse est un cas particulier du précédent où E se réduit à un point; P′ et Q′ se projettent au foyer et le centre de courbure est conjugué harmonique de M par rapport à ces points. Ce cas a été étudié par M. Mannheim.

Parabole. — L'anticaustique du foyer est la directrice.

Soit SM un rayon réfléchi; soit S′ le symétrique de S relativement à M; soit D la projection du rayon de courbure de la parabole (*fig.* 8).

Fig. 8.



Le rayon de courbure de l'anticaustique qui est ici une droite est infini; or la formule (3) nous apprend que S′ est conjugué harmonique de ce point par rapport à M et D; donc S′ est milieu de MD et l'on a

$$MD = 2MS.$$

Prolongeons $M\Omega$ jusqu'à sa rencontre ω avec la directrice; puisque

$$MD = 2MS$$

on a

$$M\Omega = 2M\omega,$$

qui est un théorème connu.