NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VOGT

Une application de la formule de Stokes

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 97-107

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__97_0>

[D3d]

UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE STOKES;

PAR M. VOGT,
Professeur à l'Université de Nancy.

1. Dans le premier Volume de son *Cours d'Analyse*, M. Picard indique, après Kronecker, la solution du problème suivant :

Étant données deux équations algébriques ou transcendantes

$$F_1(x, y) = 0, \qquad F_2(x, y) = 0,$$

entre deux variables réelles, et à coefficients réels, déterminer le nombre des solutions de ce système d'équations comprises à l'intérieur d'un contour fermé donné.

On considère pour cela l'intégrale curviligne

$$I = \frac{1}{2\pi}\int d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{F_1\, dF_2 - F_2\, dF_1}{F_1^2 + F_2^2},$$

étendue au contour donné parcouru dans le sens positif, la valeur de cette intégrale est égale à l'excès du nombre des solutions intérieures au contour pour lesquelles le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}$$

est positif, sur le nombre de celles pour lesquelles il est négatif.

Je ne sais si l'on a déjà remarqué que ce résultat est susceptible d'une généralisation relative à la ligne d'intersection de deux surfaces; c'est cette généralisation que je me propose d'indiquer ici, en suivant la marche de M. Picard.

Étant données deux équations

$$F_1(x,y,z)=0, \qquad F_2(x,y,z)=0, \tag{1}$$

entre trois variables réelles, et à coefficients réels, elles définissent une certaine ligne réelle L formée d'une ou de plusieurs parties; nous supposons les fonctions F_1 et F_2 finies continues et uniformes dans une certaine région de l'espace, et nous considérons dans cette région un contour fermé C ne rencontrant pas la ligne L; nous formons l'intégrale curviligne

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_C d \operatorname{arc\,tang}\frac{F_2}{F_1},$$

étendue au contour C parcouru dans un certain sens, et nous nous proposons de chercher la signification de cette intégrale.

On peut l'écrire, en la développant, sous la forme

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \tag{2}$$

en posant

$$P=\frac{F_1\dfrac{dF_2}{dx}-F_2\dfrac{dF_1}{dx}}{F_1^2+F_2^2},$$

$$Q=\frac{F_1\dfrac{dF_2}{dy}-F_2\dfrac{dF_1}{dy}}{F_1^2+F_2^2},$$

$$R=\frac{F_1\dfrac{dF_2}{dz}-F_2\dfrac{dF_1}{dz}}{F_1^2+F_2^2};$$

comme P, Q, R sont les dérivées partielles d'une même fonction, elles satisfont aux conditions

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

que l'on vérifie du reste directement sans peine; on en conclut que I ne change pas de valeur lorsqu'on déforme le contour C sans passer par un point où P, Q, R deviennent discontinues, c'est-à-dire sans rencontrer la ligne L.

2. Supposons que par le contour C on fasse passer une calotte de surface S, que cette calotte soit simple et ait deux faces distinctes; prenons comme face supérieure ou positive la face sur laquelle doit être situé un observateur pour que, en s'approchant du contour C, il voie le sens d'intégration de gauche à droite, comme le sens du trièdre de coordonnées; la face inférieure ou négative sera la face opposée.

Si la calotte S ne rencontre pas la ligne L, le théorème de Stokes nous indique que l'intégrale I est égale à l'intégrale double

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2\pi}\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dz\,dx \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy, \end{aligned} \right.$$

étendue à S, et cette intégrale est nulle.

Si la calotte rencontre la ligne L en des points A, B, ..., M, imaginons que l'on trace sur la surface des contours C_A, C_B, ..., C_M assez petits pour n'entourer chacun qu'un seul de ces points et pour ne couper ni C ni les autres contours; enlevons de S les portions S_A, S_B, ..., S_M intérieures à ces contours et réunissons les ouvertures ainsi pratiquées dans S au contour C par des coupures Γ_A, Γ_B, ..., Γ_M ne se coupant pas les unes les autres; ces opérations ont pour effet de constituer une calotte S_1 à un seul contour ne contenant à son intérieur aucun point de L.

L'intégrale double (3), étendue à cette calotte S_1, est constamment nulle; mais, d'après la formule de Stokes, elle est égale à l'intégrale curviligne (2), étendue au contour entier de S_1; cette intégrale est donc nulle. Elle se compose de différentes parties étendues respectivement : 1° au contour C parcouru dans le sens adopté primitivement sur ce contour; 2° aux deux bords de chacune des coupures Γ_A, Γ_B, ..., Γ_M, ces bords étant parcourus l'un dans un sens, l'autre, qui lui est opposé, dans le sens contraire; les parties d'intégrale relatives à ces bords sont deux à deux égales et de signes contraires et ont une somme nulle; 3° aux contours C_A, C_B, ..., C_M parcourus dans le même sens que le contour C relativement à la calotte S_1; les parties d'intégrale correspondantes sont égales et de signes contraires à celles que l'on obtiendrait si les contours étaient parcourus dans le sens opposé, et ce dernier sens est celui que l'on doit adopter si l'on veut que les faces supérieures des calottes partielles S_A, S_B, ..., S_M coïncident avec la face supérieure de la calotte totale S. Si donc on adopte pour tous les contours C, C_A, C_B, ..., C_M le sens pour lequel les faces supérieures des calottes S, S_A, S_B, ..., S_M soient les mêmes et si l'on appelle I, I_A, I_B, ..., I_M les valeurs de l'intégrale I étendue à ces contours, on aura

$$I = I_A + I_B + \ldots + I_M;$$

tout revient donc à évaluer chacune des intégrales du second membre.

3. Considérons l'une d'elles, par exemple la première : soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A; la tan-

gente à la ligne L en ce point a pour équations

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial z_0}(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial z_0}(z - z_0) = 0;$$

en désignant par D_1, D_2 et D_3 les déterminants

$$D_1 = \frac{\partial F_1}{\partial y_0}\frac{\partial F_2}{\partial z_0} - \frac{\partial F_2}{\partial y_0}\frac{\partial F_1}{\partial z_0},$$

$$D_2 = \frac{\partial F_1}{\partial z_0}\frac{\partial F_2}{\partial x_0} - \frac{\partial F_2}{\partial z_0}\frac{\partial F_1}{\partial x_0},$$

$$D_3 = \frac{\partial F_1}{\partial x_0}\frac{\partial F_2}{\partial y_0} - \frac{\partial F_2}{\partial x_0}\frac{\partial F_1}{\partial y_0},$$

que nous ne supposerons pas nuls simultanément, on voit que les cosinus directeurs de la tangente sont donnés par les équations

$$(4) \qquad \frac{\cos\alpha}{D_1} = \frac{\cos\beta}{D_2} = \frac{\cos\gamma}{D_3} = \pm\frac{1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}};$$

nous appellerons demi-tangente positive à la ligne L en A celle des deux directions précédentes qui correspond au signe $+$ devant le radical.

Nous supposons que la calotte S et, par suite, la calotte S_A qui en fait partie ne sont pas tangentes en A à la ligne L; le contour C_A, qui limite S_A, peut être choisi aussi petit que l'on veut; on peut sans inconvénient supposer que ce contour est une petite courbe plane et que S_A est la portion du plan de cette courbe qui lui est intérieure.

Les coordonnées des points du contour C_A auront des expressions de la forme

$$x = x_0 + \varepsilon\xi, \qquad y = y_0 + \varepsilon\eta, \qquad z = z_0 + \varepsilon\zeta,$$

ε étant une quantité fixe que l'on peut prendre aussi petite que l'on veut, ξ, η, ζ étant fonctions d'un même paramètre; l'intégrale I_A s'exprimera au moyen de ce paramètre par une somme de deux parties, l'une indépendante de ε et l'autre s'annulant avec cette dernière quantité. Comme nous avons remarqué au début que la valeur de I ou de I_A ne change pas lorsqu'on modifie le contour sans franchir la ligne L, nous concluons que l'intégrale actuelle ne doit pas varier avec ε; la seconde partie, qui peut être rendue aussi petite qu'on veut, est donc rigoureusement nulle et I_A se réduit à la première; elle est, toutes réductions faites,

$$I_A = \frac{1}{2\pi}\int_{C_A} \frac{D_1(\eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta) + D_2(\zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta) + D_3(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial F_1}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial F_1}{\partial z_0}\zeta\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial F_2}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial F_2}{\partial z_0}\zeta\right)^2}.$$

Nous choisirons comme contour C_A une ellipse tracée sur un cylindre ayant pour axe la tangente à la ligne L, et dont l'équation est

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial z_0}(z - z_0)\right]^2\\ &+ \left[\frac{\partial F_2}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial z_0}(z - z_0)\right]^2 = \varepsilon^2;\end{aligned}$$

nous assujettissons de cette façon ξ, η, ζ à rendre égal à l'unité le dénominateur de la fraction différentielle; nous remarquons, de plus, que les parenthèses qui entrent au numérateur sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale extérieure à la calotte S_A au point A; si α', β', γ' sont les angles de cette normale avec les axes de coordonnées, on a

$$\begin{aligned}&\frac{\cos\alpha'}{\eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta} = \frac{\cos\beta'}{\zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta} = \frac{\cos\gamma'}{\xi\, d\eta - \eta\, d\xi}\\ &= +\frac{1}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) - (\xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta)^2}}.\end{aligned}$$

En considérant pour un instant ξ, η, ζ comme les coordonnées des points d'une courbe plane dont les coordonnées polaires sont ρ et θ, on aura pour valeur du radical

$$\sqrt{\rho^2\, ds^2 - \rho^2\, d\rho^2} = \rho^2\, d\theta,$$

de sorte que l'on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta = \rho^2\, d\theta \cos\alpha', \\ \zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta = \rho^2\, d\theta \cos\beta', \\ \xi\, d\eta - \eta\, d\xi = \rho^2\, d\theta \cos\gamma'; \end{cases}$$

en désignant enfin par V l'angle aigu ou obtus formé par la demi-tangente positive à la ligne L et la normale extérieure à la calotte S_A en A, on a, en tenant compte des formules (4) et (5),

$$I_A = \frac{1}{2\pi} \int_{C_A} \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2} \cos V\, \rho^2\, d\theta.$$

L'intégrale

$$\int_{C_A} \rho^2\, d\theta$$

est égale au double de l'aire de l'ellipse C_A; mais cette aire peut s'évaluer d'une autre manière, car son plan fait l'angle V avec le plan de section droite du cylindre, et l'aire de cette section droite est égale à

$$\frac{\pi}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}};$$

on a donc

$$\int_{C_A} \rho^2\, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}} \, \frac{1}{|\cos V|},$$

d'où

$$I_A = \frac{\cos V}{|\cos V|}.$$

Nous voyons que l'intégrale I_A est égale à $+1$ ou à -1, suivant que l'angle V est aigu ou obtus; en faisant la somme de toutes les intégrales analogues, nous arrivons au résultat suivant :

Étant donnés un contour C *et l'intégrale* I *prise sur ce contour dans un certain sens, imaginons par ce contour une calotte quelconque* S *qui rencontre la ligne* L *en un ou plusieurs points; l'intégrale* I *est égale à l'excès du nombre des points de rencontre où la normale extérieure à* S *et la demi-tangente positive à* L *font entre elles un angle aigu sur le nombre de ces points où elles font un angle obtus.*

Lorsque les surfaces représentées par les équations (1) sont des cylindres parallèles à Oz et que le contour C est tracé dans le plan des xy, on retrouve, en prenant pour S la surface plane intérieure à C, le résultat de Kronecker et de M. Picard.

4. Nous terminerons par quelques remarques qui peuvent faciliter l'application de la proposition précédente. Considérons sur la ligne L une portion L_1 continue et ne renfermant aucun point singulier, c'est-à-dire aucun point pour lequel les déterminants fonctionnels D_1, D_2 et D_3 s'annulent simultanément; cette portion L_1 peut avoir la forme d'un contour fermé, ou s'étendre à l'infini dans un sens ou dans les deux sens; si l'on choisit sur L_1 un certain sens de mouvement, qui sera par exemple celui des arcs croissants, je dis que la demi-tangente positive sera toujours dirigée de la même manière en tous les points de L_1, c'est-à-dire sera toujours confondue avec la demi-tangente dans le sens du mouvement, ou toujours avec la demi-tangente opposée.

Cela résulte immédiatement de ce que D_1, D_2 et D_3 ne s'annulent pas à la fois; si l'on prend comme variable l'arc s de L_1 et si l'on suppose que les coordonnées des points de L_1 en sont des fonctions continues et uniformes, on a constamment

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{D_1} = \frac{\frac{dy}{ds}}{D_2} = \frac{\frac{dz}{ds}}{D_3} = \pm \frac{1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}};$$

comme le radical ne s'annule pas et que les termes des rapports sont des fonctions continues, le signe du radical ne peut changer; il suffit par suite de le déterminer en un point de L_1 pour l'avoir en tous les autres.

Une autre remarque est la suivante : Supposons que l'on déforme les surfaces F_1 et F_2 et, par suite, la ligne L, mais sans rencontrer le contour C; imaginons pour cela que les fonctions F_1 et F_2 dépendent d'un paramètre α et que l'on fasse varier ce paramètre; je dis que l'intégrale I conserve la même valeur tant que la ligne L ne vient pas couper le contour d'intégration.

Considérons deux valeurs α et $\alpha + \Delta\alpha$ du paramètre, et les valeurs correspondantes I et $I + \Delta I$ de l'intégrale curviligne étendue au contour C; on a

$$\begin{aligned} \Delta I &= \frac{1}{2\pi}\int_C d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha)}{F_1(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha)} - d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2(x, y, z, \alpha)}{F_1(x, y, z, \alpha)}, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_C d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2(\alpha + \Delta\alpha)\, F_1(\alpha) - F_1(\alpha + \Delta\alpha)\, F_2(\alpha)}{F_1(\alpha + \Delta\alpha)\, F_1(\alpha) + F_2(\alpha + \Delta\alpha)\, F_2(\alpha)}; \end{aligned}$$

la fraction qui entre sous le signe arc tang a un dénominateur qui diffère de $F_1^2 + F_2^2$ d'une quantité s'annulant avec $\Delta\alpha$; comme $F_1^2 + F_2^2$ n'est pas nul, on peut supposer que $\Delta\alpha$ est assez petit pour que le dénominateur de la fraction reste positif pour les valeurs de x, y, z correspondant à tous les points du contour d'intégration C; supposons qu'à l'origine de ce contour on prenne pour valeur de l'intégrale indéfinie arc tang celle qui est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et qu'on suive la variation de cet arc tout le long de C; la tangente ne devenant pas infinie, la valeur finale est comprise entre les mêmes limites que la valeur initiale et lui est identique; on a donc $\Delta I = 0$. On peut ainsi, de proche en proche, passer d'une première position de L à une autre sans que I cesse de garder la même valeur, ce que nous voulions démontrer.

5. Comme application de ces remarques, nous allons considérer la ligne d'intersection d'un ellipsoïde

$$F_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et d'une sphère

$$F_2 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

nous supposons que l'on ait

$$a > R > b > c,$$

de telle sorte que L soit constituée par deux parties fermées entourant l'axe des x et situées de part et d'autre du plan des yz; prenons comme contour C une portion de l'axe des x allant du point d'abscisse $-a$ à celui d'abscisse a, complétée par une demi-circonférence de rayon a dans un plan quelconque, que l'on peut sans inconvénient supposer celui des xy. Je vais montrer que l'intégrale I est nulle, bien que toute calotte passant par le contour C coupe L en deux points au moins.

En appliquant la première remarque, on est amené à chercher les signes des déterminants D_1, D_2, D_3 en un point de chacune des parties de L, par exemple en un point situé dans le plan des xy; on a alors, si $x_0, y_0, 0$ sont les coordonnées de ce point

$$D_1 = 0, \qquad D_2 = 0, \qquad D_3 = x_0 y_0 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

de façon que D_3 est négatif si x_0 et y_0 sont positifs; on en conclut que pour la portion de L, située du côté des x positifs, la demi-tangente positive est dirigée dans le sens du mouvement qui va de la portion positive du plan des xz à la portion positive du plan des xy; pour l'autre partie de L, la demi-tangente positive a une direction opposée. On en conclut facilement que l'intégrale I est nulle.

Cela résulte encore plus simplement de la deuxième remarque; supposons que l'on fasse diminuer le rayon de la sphère d'une manière continue; la ligne L se déforme, passe par une position où elle se compose de deux cercles, puis est formée de deux parties entourant Oz, et finit par disparaître sans rencontrer le contour C. L'intégrale I ne change pas, et comme elle est nulle pour $R < c$, elle est nulle pour $a < R < b$.