

MICHEL BAUER

**Note sur les groupes d'ordre  $p^\alpha$**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 19  
(1900), p. 509-511

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1900\\_3\\_19\\_\\_509\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__509_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[A4a]

NOTE SUR LES GROUPES D'ORDRE  $p^\alpha$ ;

PAR M. MICHEL BAUER, à Budapest.

---

Soit  $\mathfrak{h}$  un groupe d'ordre  $p^\alpha$ ,  $p$  étant un nombre premier. Soient les sous-groupes d'ordre  $p^{\alpha-1}$

(1)  $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_r$ ;

---

(<sup>1</sup>) *Beiträge zur Theorie Abel'scher, etc. (Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd VII).*

si nous désignons le plus grand commun diviseur des sous-groupes ( $s$ ) par  $\mathfrak{d}$ , nous pouvons démontrer les théorèmes suivants :

I. Le groupe  $\mathfrak{d}$  est différent de l'unité, excepté le cas où  $\mathfrak{h}$  est un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations outre l'unité sont d'ordre  $p$ .

II. Le groupe  $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$  est toujours un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre  $p$ .

1. Le groupe  $\mathfrak{h}$  n'est pas un groupe des opérations échangeables, c'est-à-dire le groupe des commutateurs (*Commutator-Gruppe*) appartenant à  $\mathfrak{h}$  est différent de l'unité (<sup>1</sup>). Puisque les sous-groupes  $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}_i}$  sont d'ordre  $p$  et, par conséquent, leurs opérations échangeables, tous les sous-groupes  $\mathfrak{h}_i$  contiennent le groupe des commutateurs.

2. Le groupe  $\mathfrak{h}$  contient des opérations d'ordre  $p^\beta$  ( $\beta > 1$ ). Soit  $\mathfrak{a}$  une telle opération; ses puissances forment un groupe circulaire dont l'ordre est  $p^\beta$ . Le groupe  $\mathfrak{A}$  a un seul sous-groupe d'ordre  $p^{\beta-1}$ , que nous désignons par  $\mathfrak{B}$ . Or  $\mathfrak{B}$  est contenu comme sous-groupe dans tous les groupes  $\mathfrak{h}_i$ . Car il est possible que  $\mathfrak{h}_i$  contienne  $\mathfrak{A}$  et par conséquent  $\mathfrak{B}$ . Sinon le plus grand commun diviseur de  $\mathfrak{h}_i$  avec  $\mathfrak{A}$  est un sous-groupe d'ordre  $p^{\beta-1}$ , et celui-ci ne peut être que  $\mathfrak{B}$ .

---

(<sup>1</sup>) FROBENIUS, *Ueber die Primfactoren der Gruppen determinante* (*Berliner Sitzungsberichte*, p. 1343; 1896).

3. Les opérations du groupe  $\mathfrak{h}$  sont échangeables, et toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre  $p$ . En ce cas, nous verrons que  $\mathfrak{d}$  se réduit à l'unité. Soit une base du groupe  $\mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_\alpha, \\ \mathfrak{a}'_1 = \mathfrak{a}'_2 = \dots = \mathfrak{a}'_\alpha. \end{aligned}$$

Si  $\mathfrak{w}$  est une opération quelconque différente de l'unité, on peut construire un sous-groupe d'ordre  $p^{\alpha-1}$  qui ne contient pas  $\mathfrak{w}$ . Par exemple, soit

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{a}_1^{r_1} \mathfrak{a}_2^{r_2} \dots \mathfrak{a}_\alpha^{r_\alpha}$$

et

$$(r_1, p) = 1;$$

alors le groupe minimum des opérations

$$(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \dots, \mathfrak{a}_\alpha)$$

est un sous-groupe d'ordre  $p^{\beta-1}$  qui ne contient pas  $\mathfrak{w}$ .

$$(2) \quad \frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{d}}, \quad \frac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{d}}, \quad \dots, \quad \frac{\mathfrak{h}_r}{\mathfrak{d}}.$$

4. Soit le groupe  $\mathfrak{d}$  d'ordre  $p^\gamma$ ; alors les sous-groupes sont les mêmes que les sous-groupes d'ordre  $p^{\alpha-\gamma-1}$  du groupe  $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$  dont l'ordre est  $p^{\alpha-\gamma}$ . Or il suit de la définition de  $\mathfrak{d}$  que, outre l'unité, les groupes (2) n'ont pas des opérations communes, et ainsi  $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$  est un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre  $p$ .

---