Nouvelles annales de mathématiques

Issaly

Sur le développement de l'équation différentielle des lignes géodésiques d'une surface

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 392-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__392_1>

[O5b]

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE;

Par M. l'abbé ISSALY.

De nos recherches antérieures relatives aux lignes remarquables qu'on peut tracer, soit sur les surfaces, soit sur les pseudo-surfaces ([1]), il résulte que, *dans les deux cas,* l'équation notamment des lignes géodésiques peut s'écrire ainsi :

$$d\varphi + r\,ds + r'\,ds' = 0, \tag{1}$$

([1]) Voir *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1897.

les arcs ds, ds' désignant les projections (obliques) de l'arc élémentaire dS de la ligne considérée (S), sur les arêtes MX, MY du trièdre *birectangle* mobile MXYZ, supposé d'angle Φ, et φ représentant l'inclinaison des deux arcs ds, dS, l'un sur l'autre.

Comme il ne sera question, dans ce qui doit suivre, que de géodésiques appartenant à des *surfaces*, nous mettrons immédiatement l'équation (1) sous la forme appropriée

$$(1') \qquad d\varphi + \mathrm{A}\, r\, du + \mathrm{A}' r'\, du' = 0,$$

et notre but principal sera d'obtenir les expressions *vraies* de r, r', $d\varphi$, en fonction de A, A′, Φ et des dérivées partielles de ces quantités, par rapport aux variables u, u', fonctions elles-mêmes (si l'on veut) d'une troisième variable, t, par exemple. Pour plus de facilité dans cette recherche, nous distinguerons le cas où Φ est constant d'avec celui où il est variable.

I. Premier cas : *L'angle Φ est constant.* — Et d'abord l'expression des coefficients $\mathrm{A}r$, $\mathrm{A}'r'$ nous est fournie par notre précédente Note (*Nouvelles Annales*, 1900, p. 49), d'après laquelle, toutes *compensations d'erreurs* préalablement écartées, on a, eu égard aux hypothèses $n = r$, $n' = r'$,

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}\, r &= -\frac{1}{\mathrm{A}' \sin\Phi}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'} - \frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\ \mathrm{A}' r' &= \frac{1}{\mathrm{A} \sin\Phi}\left(\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'}\cos\Phi\right). \end{aligned}\right.$$

Il ne reste donc qu'à évaluer $d\varphi$.

Pour y parvenir, nous rappelons qu'en faisant $\mathrm{MM}' = dS$, le triangle infinitésimal $\mathrm{M}\mu\mathrm{M}'$ donne

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{A}\, du}{\sin\varphi'} = \frac{\mathrm{A}'\, du'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{\sin\Phi},$$

conjointement avec

$$(4)\qquad \Phi = \varphi + \varphi',$$

et

$$(5)\qquad dS^2 = A^2 du^2 + A'^2 du'^2 + 2AA'\cos\Phi\, du\, du'.$$

De là on tire

$$(6)\qquad \begin{cases} d(A\,du)\sin\Phi = d^2S\sin\varphi' + dS\,d\varphi'\cos\varphi', \\ d(A'du')\sin\Phi = d^2S\sin\varphi + dS\,d\varphi\cos\varphi. \end{cases}$$

Éliminant d^2S et observant que, par supposition, $d\varphi' = -d\varphi$, il vient, en tenant compte de (3),

$$(7)\qquad \begin{cases} d\varphi = \dfrac{\sin\Phi}{dS^2}\Big[AA'(du\,d^2u' - du'\,d^2u) \\ \qquad\qquad + \left(A\dfrac{\partial A'}{\partial u} - A'\dfrac{\partial A}{\partial u}\right) du^2\,du' \\ \qquad\qquad + \left(A\dfrac{\partial A'}{\partial u'} - A'\dfrac{\partial A}{\partial u'}\right) du\,du'^2\Big]. \end{cases}$$

Ceci posé, remontons à l'équation (1). Si l'on y substitue les valeurs (2), (5) et (7), on en déduira, pour la solution du cas restreint qui nous occupe, l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$(8)\qquad \begin{cases} (du\,d^2u' - du'\,d^2u)\sin^2\Phi \\ \quad = \dfrac{A}{A'^2}\left(\dfrac{\partial A}{\partial u'} - \dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right) du^3 \\ \quad + \Big[\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial A}{\partial u} - \dfrac{2}{A'}\dfrac{\partial A'}{\partial u}\right)\sin^2\Phi \\ \qquad + \dfrac{3}{A'}\left(\dfrac{\partial A}{\partial u'} - \dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right)\cos\Phi\Big] du^2\,du' \\ \quad - \Big[\left(\dfrac{1}{A'}\dfrac{\partial A'}{\partial u'} - \dfrac{2}{A}\dfrac{\partial A}{\partial u'}\right)\sin^2\Phi \\ \qquad + \dfrac{3}{A'}\left(\dfrac{\partial A'}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right)\cos\Phi\Big] du\,du'^2 \\ \quad - \dfrac{A'}{A^2}\left(\dfrac{\partial A'}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right) du'^3. \end{cases}$$

Cette équation, dont nous garantissons l'exactitude, est, comme on devait s'y attendre, parfaitement symétrique en u, u', A, A'.

Bien qu'elle tire sa simplicité (relative) de ce fait que $\sin\Phi$ et $\cos\Phi$ s'y trouvent mis *tous deux* en évidence, il sera toutefois loisible d'éliminer, dans certaines applications, ces deux lignes trigonométriques à l'aide des relations usuelles

$$(9) \qquad \cos\Phi = \frac{B''}{AA'}, \qquad \sin\Phi = \frac{1}{AA'}\sqrt{A^2A'^2 - B''^2}.$$

Pas ne sera besoin, à coup sûr, de cette substitution, si l'on veut envisager le cas particulier, mais très important, où l'angle Φ des coordonnées est droit. On a alors, en effet, aussitôt

$$(8') \quad \left\{ \begin{aligned} & du\, d^2u' - du'\, d^2u \\ & \quad = \frac{A}{A'^2}\frac{\partial A}{\partial u'}du^3 + \left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{2}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}\right)du^2\,du' \\ & \qquad\qquad - \left(\frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u'} - \frac{2}{A}\frac{\partial A}{\partial u'}\right)du\,du'^2 \\ & \qquad\qquad - \frac{A'}{A^2}\frac{\partial A'}{\partial u}du'^3. \end{aligned} \right.$$

Mettons nos résultats à l'épreuve à l'aide de cette dernière forme, et choisissons pour cela l'héliçoïde gauche, représenté par le système

$$x_0 = \rho\cos\theta, \qquad y_0 = \rho\sin\theta, \qquad z_0 = a\theta.$$

On s'assurera avant tout qu'avec ces données,

$$A = \sqrt{\rho^2 + a^2}, \qquad A' = 1, \qquad \Phi = \frac{\pi}{2},$$

et que dès lors c'est bien la formule (8') qui est *directement* en cause. Posant $u = \theta$, $u' = \rho$ et adoptant θ pour variable indépendante, ce qui implique $d^2u = d^2\theta = 0$, on trouvera pour équation des lignes géodésiques de la surface proposée

$$\left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\right)\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - (\rho^2 + a^2) = 0,$$

équation exacte dont l'intégration, on le sait, est possible.

Comme *transition* avec le cas où l'angle Φ varie, il est à propos de remarquer qu'en différentiant, dans cette seconde hypothèse, la valeur (9) de $\cos\Phi$, par rapport à u, par exemple, on en déduit

$$AA'\frac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi = -\frac{\partial B''}{\partial u} + \cos\Phi\left(A'\frac{\partial A}{\partial u} + A\frac{\partial A'}{\partial u}\right),$$

ou bien

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\sqrt{A^2A'^2 - B''^2} = -\frac{\partial B''}{\partial u} + B''\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}\right).$$

Donc, pour exprimer, avec le nouveau paramètre B'', que $\Phi =$ const., il est nécessaire et suffisant de poser la condition

$$\frac{\partial B''}{\partial u} = B''\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}\right).$$

La deuxième variable conduirait évidemment au même résultat en u'.

II. Deuxième cas : *L'ange Φ est variable.* — L'équation des lignes géodésiques admet alors, tant pour les pseudo-surfaces que pour les surfaces, la double forme que voici :

$$(10)\qquad \begin{cases} d\varphi + r\,ds + r'\,ds' = 0, \\ d\varphi' - n\,ds - n'\,ds' = 0, \end{cases}$$

formes équivalentes, dans la seconde desquelles,

$$(11)\qquad n = r + \frac{\partial\Phi}{\partial s},\qquad n' = r' + \frac{\partial\Phi}{\partial s'}.$$

Je dis équivalentes, car, par addition, on en déduit l'identité

$$d\varphi + d\varphi' = d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial s}\,ds + \frac{\partial\Phi}{\partial s'}\,ds'.$$

Dans le cas spécial des surfaces, il y a lieu de mettre le système (10) sous la forme particulière

$$(10')\qquad \begin{cases} d\varphi + A r\,du + A' r'\,du' = 0, \\ d\varphi' - A n\,du + A' n'\,du' = 0, \end{cases}$$

avec

$$(11')\qquad n = r + \frac{1}{A}\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \qquad n' = r' + \frac{1}{A'}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}.$$

Bien plus, comme il importe de diriger dès à présent les nouveaux calculs de façon à leur donner toute la symétrie possible, c'est par l'équation combinée

$$(12)\qquad d\varphi - d\varphi' + A(n + r)\,du + A'(n' + r')\,du' = 0,$$

qu'il convient de remplacer le système (10').

Cela étant, d'après la Note déjà citée, nous avons

$$(13)\qquad \begin{cases} A n = A r + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = -\dfrac{1}{A'\sin\Phi}\left(\dfrac{\partial A}{\partial u'} - \dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\ A' r' = A n' - \dfrac{\partial\Phi}{\partial u'} = \dfrac{1}{A\sin\Phi}\left(\dfrac{\partial A'}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right); \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément

$$(14)\qquad \begin{cases} A(n + r) = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} - \dfrac{2}{A'\sin\Phi}\left(\dfrac{\partial A}{\partial u'} - \dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\ A'(n' + r') = \dfrac{\partial\Phi}{\partial u'} - \dfrac{2}{A\sin\Phi}\left(\dfrac{\partial A'}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right). \end{cases}$$

Il n'y a donc plus qu'à connaître la différence $d\varphi - d\varphi'$.

A cet effet, nous ferons observer que les formules initiales (3), (4) et (5) restent les mêmes, que Φ soit constant ou non. Mais il n'en est pas ainsi du système (6), car, dans ce second cas, il devient

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & d(\mathrm{A}\,du)\sin\Phi + (\mathrm{A}\,du)\cos\Phi\, d\Phi \\ & \quad = d^2\mathrm{S}\sin\varphi' + d\mathrm{S}\cos\varphi'\, d\varphi', \\ & d(\mathrm{A}'\,du')\sin\Phi + (\mathrm{A}'\,du')\cos\Phi\, d\Phi \\ & \quad = d^2\mathrm{S}\sin\varphi + d\mathrm{S}\cos\varphi\, d\varphi. \end{aligned}\right.$$

Éliminant à nouveau $d^2\mathrm{S}$ et remplaçant dans l'équation résultante, une première fois, $d\varphi'$ par $d\Phi - d\varphi$; une deuxième fois, $d\varphi$ par $d\Phi - d\varphi'$, on obtient, de la sorte, deux équations qui, combinées entre elles, fournissent la différence cherchée, savoir

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} d\varphi - d\varphi' = \frac{2\sin\Phi}{d\mathrm{S}^2} & \Big[\mathrm{A}\mathrm{A}'(du\, d^2u' - du'\, d^2u) \\ & + \left(\mathrm{A}\frac{\partial\mathrm{A}'}{\partial u} - \mathrm{A}'\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial u}\right) du^2\, du' \\ & + \left(\mathrm{A}\frac{\partial\mathrm{A}'}{\partial u'} - \mathrm{A}'\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial u'}\right) du\, du'^2\Big] \\ & + (\mathrm{A}'^2\, du'^2 - \mathrm{A}^2\, du^2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}du + \frac{\partial\Phi}{\partial u'}du'\right). \end{aligned}\right.$$

Ce point acquis, si l'on compare cette dernière expression avec la formule similaire (7), on reconnaîtra aussitôt que la substitution, actuellement à faire, des valeurs (5), (14) et (16) dans l'équation (12), donnera nécessairement lieu à des calculs de réduction (en majeure partie) *identiques* à ceux qui ont été exécutés dans le premier cas, si bien qu'abstraction faite du facteur 2 (destiné d'ailleurs à disparaître à la fin des opérations) les seuls nouveaux termes à considérer sont ceux qui renferment les dérivées partielles $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u'}$. Or il se trouve que ces termes se réduisent à *quatre*, constituant la somme suivante

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi\, du^3 + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi\cos\Phi\, du^2\, du' \\ & \qquad - \frac{\partial\Phi}{\partial u'}\sin\Phi\cos\Phi\, du\, du'^2 - \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}du'^3, \end{aligned}$$

et que tout se réduit, par suite, à les répartir, un par un, dans chacun des quatre coefficients du second membre de (8).

Moyennant ces indications, il nous paraît superflu d'écrire *in extenso* la formule relative à ce second cas. Disons seulement qu'en vertu de ce qui précède, elle ne le cédera pas en symétrie à celle du premier.

Que s'il devenait utile d'y remplacer Φ par le paramètre B'', il suffirait d'adjoindre aux relations (9) celles-ci

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\sqrt{A^2A'^2 - B''^2} = -\frac{\partial B''}{\partial u} + B''\left(\frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\sqrt{A^2A'^2 - B''^2} = -\frac{\partial B''}{\partial u'} + B''\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u'} + \frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u'}\right),$$

dont la première a été signalée déjà dès le premier cas.

Nous terminerons notre travail par la remarque suivante :

Si le *développement* de l'équation différentielle des lignes géodésiques constitue un polynome d'une étendue peu commune, par contre, l'équation elle-même de ces lignes peut être *condensée* dans une formule très simple.

En effet, en développant dans (10) ou (10′) les différentielles totales $d\varphi$ et $d\varphi'$, on déduira sans peine de l'un ou l'autre de ces systèmes, joints aux relations (3),

$$\frac{1}{A'}\frac{\partial\varphi}{\partial u'}\sin\varphi - \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi'}{\partial u}\sin\varphi' + n\sin\varphi' + r'\sin\varphi = 0.$$

Substituant à n et à r' leurs valeurs (13), il vient

$$\frac{\partial A}{\partial u'}\cos\varphi - A\frac{\partial\varphi}{\partial u'}\sin\varphi = \frac{\partial A'}{\partial u}\cos\varphi' - A\frac{\partial\varphi'}{\partial u}\sin\varphi',$$

ou, plus simplement,

$$(17)\qquad \frac{\partial}{\partial u'}(A\cos\varphi) = \frac{\partial}{\partial u}(A'\cos\varphi').$$

Telle est, sous sa forme, on peut le dire, la plus simple, l'équation des lignes géodésiques d'une surface donnée. Son interprétation est facile.

On a effectivement, dans tous les cas,

$$dS = ds \cos\varphi + ds' \cos\varphi',$$

et pour les surfaces, en particulier,

$$dS = A \cos\varphi \, du + A' \cos\varphi' \, du'.$$

Or si l'on écrit la condition *d'intégrabilité* de cette valeur de dS, on retombera précisément sur l'équation (17).